ALGEBRA I - Práctica N°1 - Primer cuatrimestre de 2002

1. Conjuntos: nociones elementales

Ejercicio 1. Decidir, en cada uno caso de los siguientes casos, si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ ó $A = B$.

i) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 1, 3\}$
ii) $A = \{1, 1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3\}$
iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x - 6 = 0\}$; $B = \{2, -3\}$
iv) $A = \{n, m\}$; $B = \{\min(n, m), \max(n, m)\}$ (donde n y m son números reales)
v) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 2\}$
vi) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 2\}$
vii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x + y)^2 = x^2 + y^2\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 0\}$
viii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - y = 1\}$; $B = \{t(1, 2) + (0, -1) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$
ix) $A = \{\dfrac{(-1)^n m}{r} \,/\, n, m, r \in \mathbb{N}\}$; $B = \mathbb{Q}$

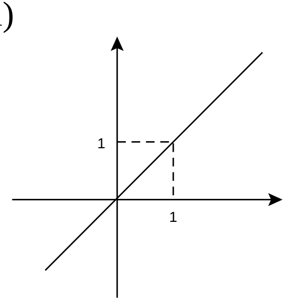
Ejercicio 2.

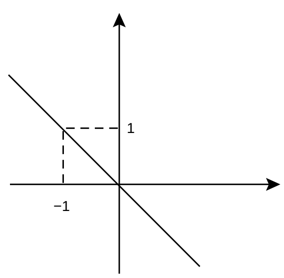
a) Describir a cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ mediante *una sola* ecuación:

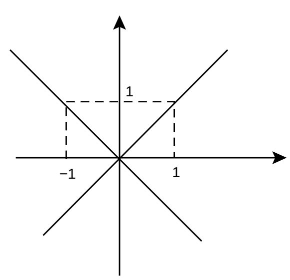
i) $\{-3, 1, 5\}$

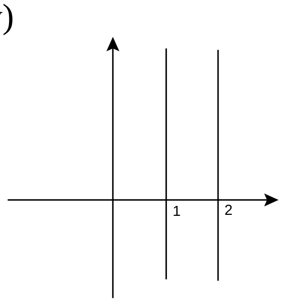
ii) $(-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$

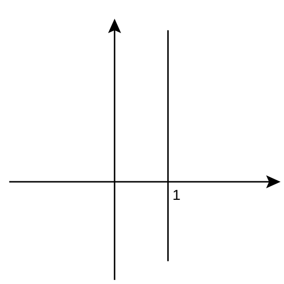
b) Describir a cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ mediante *una sola* ecuación:

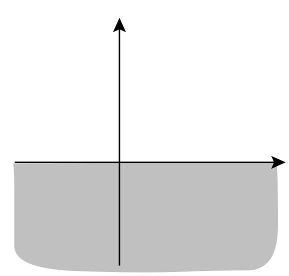
i)


ii)


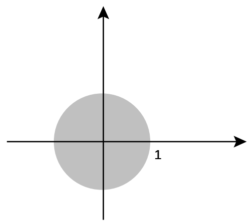
iii)


iv)


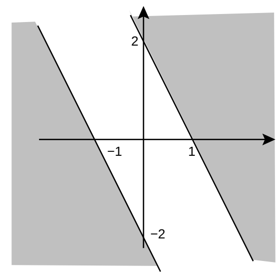
v)


vi)


vii)



(*) viii)



Ejercicio 3. Dado el conjunto $A = \{\emptyset, 1, 1, \{2\}, \{2,3\}, 2\}$, decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) $\emptyset \in A$
b) $\emptyset \subseteq A$
c) $\emptyset \supseteq A$
d) $\{2\} \subseteq A$
e) $\{2,3\} \subseteq A$
f) $1 \subseteq A$
g) $\{1\} \subseteq A$
h) $\{\{1\}\} \subseteq A$
i) $\{2\} \in A$
j) $2 \notin A$
k) $3 \in A$
l) $\{2,3\} \in A$
m) $\{1,1\} \subseteq A$

Ejercicio 4. Si un conjunto tiene n elementos ¿cuántos subconjuntos de $n-1$ elementos posee?

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes casos, describir el conjunto de partes del conjunto A por extensión:

i) $A = \{1\}$
ii) $A = \{1,2\}$
iii) $A = \{1,2,3\}$
iv) $A = \{1,\{1,2\}\}$

Observar la relación que existe entre la cantidad de elementos de A y la de su conjunto de partes.

Ejercicio 6. Se considera el conjunto de referencia $V = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 10\}$, y los subconjuntos $A = \{1,4,7,10\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y $C = \{2,4,6,8\}$. Describir los siguientes subconjuntos, en donde la prima indica complemento respecto de V.

i) $A \cup B$
ii) $A \cap B$
iii) $A' \cup B'$
iv) $(A \cap B)'$
v) $A' \cap B'$
vi) $(A \cup B)'$
vii) $C \cap (A \cup B)$
viii) $(C \cap A) \cup (C \cap B)$
ix) $C \cup (A \cap B)$
x) $(C \cup A) \cap (C \cup B)$
xi) $(A \cup B) \cup C$
xii) $A \cup (B \cup C)$
xiii) $(A \cap B) \cap C$
xiv) $A \cap (B \cap C)$

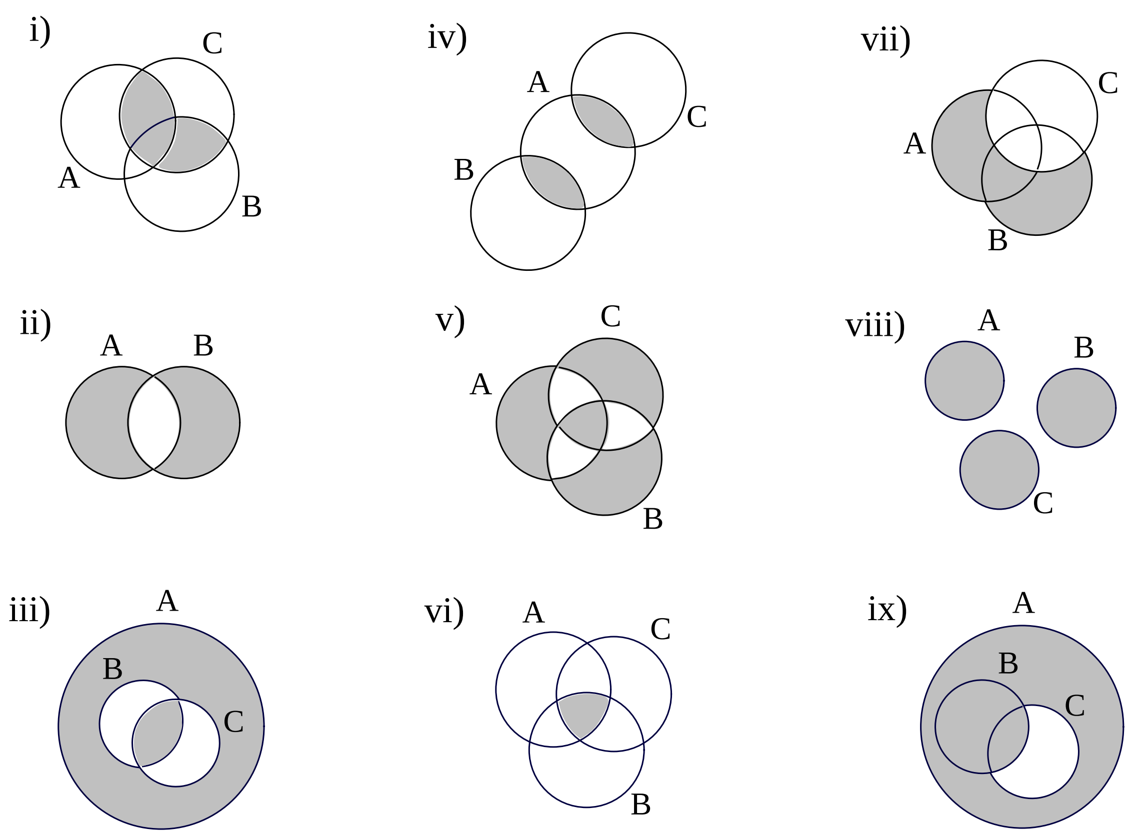
Ejercicio 7.

a) Una compañía tiene 420 empleados de los cuales 240 obtuvieron un aumento, 115 obtuvieron un ascenso y 60 de ellos obtuvieron ambas cosas. ¿Cuántos empleados no obtuvieron ni aumento ni ascenso?

b) En un grupo de 150 estudiantes, 83 se anotaron en Análisis, 67 se anotaron en Algebra y 45 en ambas materias. ¿Cuántos de los estudiantes no están inscriptos en ningún curso?

c) En un grupo de 110 alumnos, 63 estudian Inglés, 30 estudian Francés y 50 estudian Alemán. Hay 25 alumnos que estudian exactamente dos idiomas y 63 alumnos que estudian solamente un idioma. 13 alumnos estudian Inglés y Francés, 30 estudian Inglés y Alemán y 12 estudian Francés y Alemán. ¿Cuántos alumnos estudian los tres idiomas al mismo tiempo? ¿Cuántos alumnos estudian Inglés y Francés pero no Alemán? ¿Cuántos no estudian ninguno de estos idiomas?

Ejercicio 8. Encontrar fórmulas que describan las partes sombreadas de los siguientes diagramas. Utilizar únicamente intersecciones, uniones y diferencias entre los conjuntos A, B y C.



Ejercicio 9. Suponiendo que en el ejercicio anterior los conjuntos A, B y C están definidos respectivamente por las propiedades p, q y r:

i) Escribir, para cada caso, una propiedad que, en términos de p, q y r, defina las zonas sombreadas.

ii) Escribir las tablas de verdad de cada una de las expresiones en p, q y r formadas en el punto i).

Ejercicio 10. Dar un ejemplo y un contraejemplo para cada una de las siguientes igualdades de conjuntos

i) $A \cap (B \cap C) = B \cap C$
ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
iii) $A \cup B = A \cap B$
iv) $A \triangle B = A \cup B$

Ejercicio 11. Se considera el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Se sabe que el conjunto B, que tiene por elementos a conjuntos, cumple simultáneamente las siguientes propiedades:

i) $\{1, 2\} \in B$
ii) $\{1\} \in B$
iii) $C \in B \Rightarrow A - C \in B$
iv) $C, D \in B \Rightarrow C \cup D \in B$

¿Es cierto que $\mathcal{P}(A) \subseteq B$? Justificar.

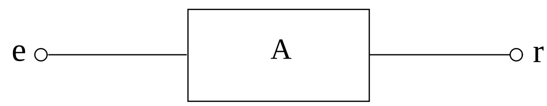
Ejercicio 12. Demostrar las siguientes identidades, donde A, B y C son subconjuntos de un conjunto V y la prima indica complemento respecto a V.

i) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
ii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
v) $A \triangle \emptyset = A$
vi) $A \triangle A = \emptyset$
vii) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$
viii) $(A \triangle B) \triangle B = A$
ix) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
x) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
xi) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
xii) $A - (A \triangle B) = A \cap B$
xiii) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C \cap A')$
xiv) $A - B = A - (A \cap B)$
xv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

Ejercicio 13. Demostrar las siguientes afirmaciones:

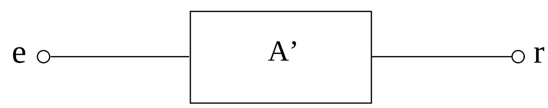
i) $A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$
ii) $A \subseteq B' \iff B \subseteq A'$
iii) $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$
iv) $A \subseteq B \Rightarrow A \triangle B = B \cap A'$
v) $B \subseteq C \Rightarrow (A - C) \cap B = \emptyset$
vi) $C \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) \triangle (B \cap C) = (B \triangle C) - (A \triangle B)$
vii) $C \subseteq A \Rightarrow (B \cap C') \cup (A \triangle C) = (A \cup B) - C$
viii) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$

Ejercicio 14. Un emisor e envía señales de diferentes frecuencias a un receptor r a través de un cable conductor. Se dipone de filtros que dejan pasar a unas señales sí y a otras no, dependiendo de sus frecuencias.



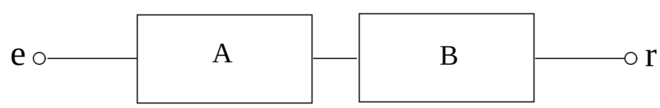
filtro

Cada uno de estos filtros tiene una llave que al accionarla invierte el espectro de frecuencias que el filtro deja pasar.

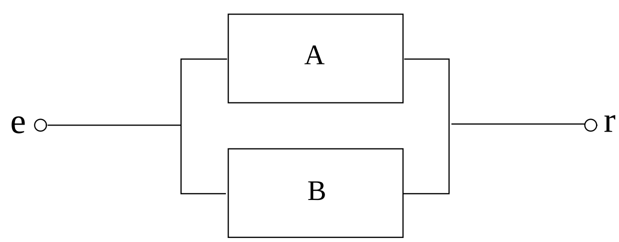


filtro invertido

Los filtros pueden conectarse en serie o en paralelo para formar nuevos filtros.



conexión serie

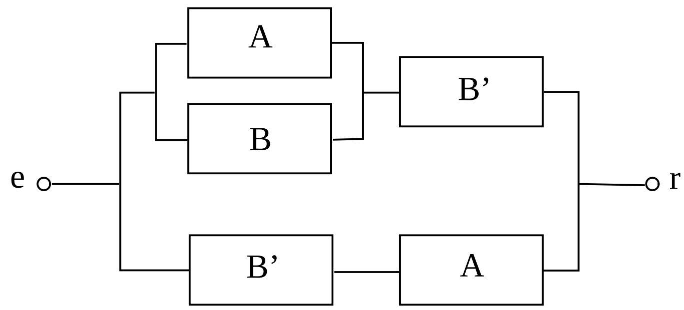


conexión paralela

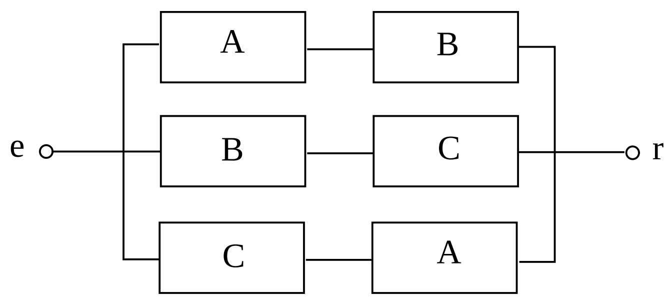
Se considera ahora en el conjunto de todas las frecuencias y se identifica a cada filtro con el subconjunto formado por aquellas fecuencias que éste deja pasar.

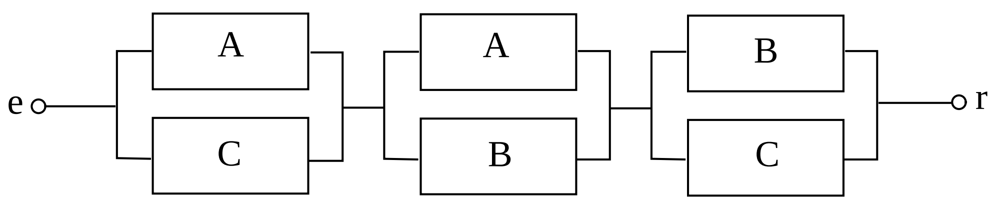
i) Observar que con la identificación recién establecida, se tienen las siguientes correspondencias
   a) Filtro invertido $\longleftrightarrow$ Complemento
   b) Conexión serie $\longleftrightarrow$ Intersección
   c) Conexión paralela $\longleftrightarrow$ Unión
ii) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B y C
   a) $(A \cup B)'$
   b) $(A \cap B)'$
   c) $A \cup (B \cap C)$
   d) $(A \cup C) \cap (A \cup C)$
   e) $A \triangle B$

iii) Rediseñar el siguiente circuito construyendo otro equivalente pero que utilice únicamente dos filtros. ¿A qué conjunto corresponde el filtro resultante?



iv) ¿Son los siguientes circuitos equivalentes? En caso afirmativo escribir la identidad de conjuntos que resulta y demostrarla.





Ejercicio 15. Sean A, B, C y D subconjuntos de un conjunto universal V.

a) i) Dibujar un circuito para el conjunto $[\,(D \triangle (A \cap B)\,] - C$ utilizando únicamente filtros para A, B, C, D y sus complementos.

ii) Probar que, si $D \subset A \cup B$,

$$[\,(D \triangle (A \cap B)\,] - C = (A \cap B' \cap C' \cap D) \cup (A \cap B \cap C' \cap D') \cup (A' \cap B \cap C' \cap D)$$

b) i) Dibujar un circuito para el conjunto $[\,(D \cap A) \triangle (D \cap B')\,] \cup [A \cap B' \cap (C - D)\,]$ utilizando únicamente filtros para A, B, C, D y sus complementos.

ii) Probar que, si $D \subset C$,

$$[\,(D \cap A) \triangle (D \cap B')\,] \cup [A \cap B' \cap (C - D)\,] = (A \cap B' \cap C \cap D') \cup (A \cap B \cap D) \cup (A' \cap B' \cap C \cap D)$$

iii) Dar un contraejemplo para la igualdad de ii) si $D \not\subset C$.

c) i) Dibujar un circuito para el conjunto $(A' \cap B \cap C) \triangle (D' \cap C)$ utilizando únicamente filtros para A, B, C, D y sus complementos.

ii) Se sabe que $(A' \cap B \cap C \cap D) \cup (C \cap D' \cap A) = (A' \cap B \cap C) \triangle (D' \cap C)$. Probar que $(C - B) \cap D' \subset A$.

2. Relaciones entre conjuntos

Ejercicio 16. Siendo $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$, describir por extensión los siguientes conjuntos:

i) $X \times Y$ iii) $X \times X$

ii) $Y \times X$ iv) $Y \times Y$

Observar la relación existente entre la cantidad de elementos del producto cartesiano y las cantidades de elementos de los conjuntos involucrados.

Ejercicio 17. Escribir por extensión **todas** las relaciones de A en B siendo $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$

Ejercicio 18. Dados A, B y C conjuntos, demostrar las siguientes igualdades:

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

Ejercicio 19. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se considera la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 4)\}$$

a) Describir la relación $\mathcal{R}$ dando:

i) Una matriz de 5×5 en la que cada fila y cada columna corresponde a un elemento de A y en cada entrada hay un 1 o un 0 dependiendo de que el par correspondiente esté o no en la relación.

ii) Los puntos de intersección de una grilla que represente a $A \times A$

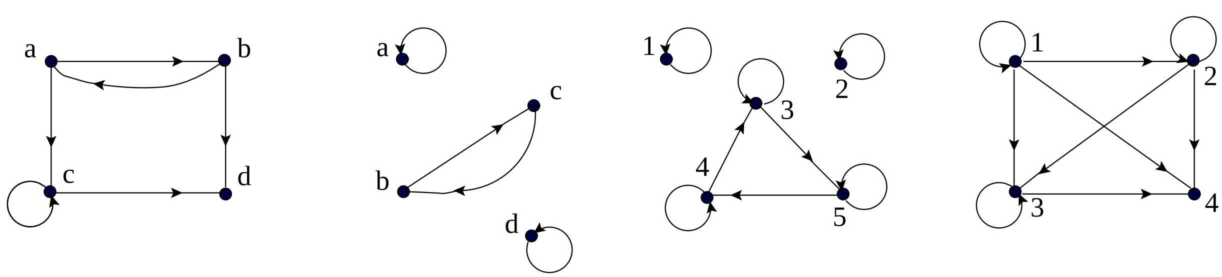
iii) Un diagrama de Venn con flechas que indiquen que elementos están relacionados.

b) Construir una nueva relación $\mathcal{R}_1$ agregando a la relación $\mathcal{R}$ la **menor** cantidad de pares posible de modo que $\mathcal{R}_1$ sea transitiva.

c) Construir una nueva relación $\mathcal{R}_2$ agregando a la relación $\mathcal{R}$ la **menor** cantidad de pares para que $\mathcal{R}_2$ sea una relación simétrica.

d) Construir una nueva relación $\mathcal{R}_3$ agregando a la relación $\mathcal{R}$ la **menor** cantidad de pares para que $\mathcal{R}_3$ sea a la vez una relación simétrica y transitiva. ¿Es $\mathcal{R}_3$ reflexiva?

Ejercicio 20. Describir las siguientes relaciones por extensión, mediante matrices y grillas y analizar la validez de las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.



Ejercicio 21. Se consideran las siguientes relaciones del conjunto $A = \{2, 5, 7\}$ en sí mismo. Decidir si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, transitivas y clasificarlas en relaciones de equivalencia o de orden.

i) $A \times A$
ii) $A \times \{2\}$
iii) $\{(x, x) \ / \ x \ \in A\}$
iv) $\{(2, 7), (2, 5), (5, 7)\}$
v) $\{(5, 2), (7, 2), (5, 7), (2, 2)\}$
vi) $\{(5, 7), (7, 2), (2, 5)\}$
vii) $\{(2, 2), (5, 5), (7, 7), (2, 5), (5, 2)\}$
viii) $\{(2, 2), (5, 5), (7, 7), (2, 5)\}$
ix) $\{(2, 2), (5, 5), (2, 5), (5, 2)\}$

Ejercicio 22.

i) ¿Es $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es par}\}$ una relación de equivalencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$?
ii) ¿Es la relación $\mathcal{R}$ definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como
$$a\mathcal{R}b \iff |a| \leq |b|$$
una relación de orden?
iii) Se considera la relación $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por
$$A\mathcal{R}B \iff 2 \notin A \triangle B$$
Decidir si es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

Ejercicio 23. Sea A un conjunto no vacío. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

i) $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ relación simétrica $\Rightarrow \mathcal{R}$ no es relación antisimétrica
ii) $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ relación de equivalencia $\Rightarrow \mathcal{R}$ no es relación de orden
iii) $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ relación simétrica y transitiva y $\{x \in A \,/\, \exists\, y \in A, (x, y) \in \mathcal{R}\} = A \Rightarrow \mathcal{R}$ relación de equivalencia
iv) $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ relación de equivalencia y de orden $\Rightarrow \mathcal{R} = \{(x, x) \ / \ x \ \in \ A\}$
v) $S \subseteq A \Rightarrow (S \times S) \cup ((A - S) \times (A - S))$ es relación de equivalencia de A en sí mismo.

Ejercicio 24. Dado $A = \{a, b, c, d\}$:

i) Construir la partición de A asociada a la relación de equivalencia
$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (c, d), (d, c)\}$$
ii) Construir la partición de A asociada a la relación de equivalencia
$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$$
iii) Construir la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida por la partición
$$\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$$

Ejercicio 25. Describir por extensión **todas** las relaciones de equivalencia de A en sí mismo, siendo $A = \{1, 2, 3\}$.

3. Funciones

Ejercicio 26. Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$, decidir si cada uno de los siguientes subconjuntos de $A \times A$ es o no una función. Justificar:

i) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\}$
ii) $\{(1,4),\ (2,3),\ (2,2),\ (4,1)\}$
iii) $\{(2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (4,4)\}$
iv) $\{(1,1),\ (2,1),\ (3,1),\ (4,1)\}$

Ejercicio 27. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 - 1$. Calcular:

i) $f(0),\ f(1),\ f(-1)$
ii) $f(x+1)$
iii) $f(x^2)$
iv) $f(x+y)$
v) $f(x) + f(y)$
vi) $f(2x^2 - 1)$

Ejercicio 28. Para cada una de las siguientes relaciones en $\mathbb{R}^2$, escribir una tabla de valores, dibujar una curva aproximada y decidir si se trata o no de una función:

i) $y = 2x - 1$
ii) $x = y^2$
iii) $y = x^3/3$

Ejercicio 29. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas y calcular, cuando exista, la función inversa.

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 12x - 3$
ii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(x) = 2x$
iii) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = |x|$
iv) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(x,y) = x + y$
v) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = xy$
vi) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (2x, x+y)$
vii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 6 \\ x + 6 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Ejercicio 30. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son funciones de A en B. En caso afirmativo, estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

i) $\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \,/\, 2x + 3y = 1\} \quad A \times B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}.$
ii) $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,/\, x + y = 1\} \quad A \times B = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.$
iii) $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x + y = 1\} \quad A \times B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$
iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \leq y\} \quad A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$

Ejercicio 31. Se considera la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

i) ¿Es f inyectiva?
ii) ¿Es sobreyectiva?

Ejercicio 32. Demostrar que si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son dos funciones, entonces valen las siguientes propiedades:

i) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
ii) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
iii) Si f y g son ambas inyectivas, también lo es $g \circ f$.
iv) Si f y g son ambas sobreyectivas, también lo es $g \circ f$.
v) Si f y g son ambas biyectivas, también lo es $g \circ f$.

Ejercicio 33. Sea B el conjunto de todas las expresiones de la forma

$$b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$$

en las que cada b_i es o bien 0 o bien 1. Los elementos de B se llaman *bytes*. Cada una de las cifras de un byte es un *bit* (cada byte tiene 8 bits). Los bits se identifican por su posición dentro del byte y están numerados en orden descendente de 7 a 0 (el bit de la derecha es el número 0 y el de la izquierda, el 7).
Se consideran las siguientes funciones de B en B:

R: desplaza cada bit un lugar hacia la derecha, pone un 0 en el bit 7 y descarta el bit 0.
L: desplaza cada bit un lugar hacia la izquierda, pone un 0 en el bit 0 y descarta el bit 7.

En lo que sigue b denota a un elemento cualquiera, pero fijo, de B

A efectúa un AND ('y' lógico, $\wedge$) bit a bit con b. ($0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$)
O efectúa un OR ('o lógico', $\vee$) bit a bit con b. ($0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $1 \vee 1 = 1$)
X efectúa un XOR ('o lógico exclusivo', $\triangle$) bit a bit con b. ($0 \triangle 0 = 0$, $0 \triangle 1 = 1$, $1 \triangle 0 = 1$, $1 \triangle 1 = 0$)

Ejemplos: $R(10100110) = 01010011$, $L(10100110) = 01001100$.
Si $b = 11110000$, $A(10100110) = 10100000$, $O(10100110) = 11110110$ y $X(10100110) = 01010110$.

Calcular $R \circ L$, $L \circ R$, $A \circ A$, $A \circ O$, $O \circ A$, $X \circ X$. Solamente una de estas funciones es biyectiva; descubrir cuál y encontrar su inversa.

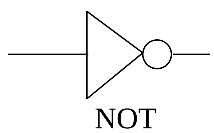
Aplicaciones

Los operadores lógicos pueden aplicarse a las señales eléctricas digitales de la misma manera en que se aplican a los símbolos 1 y 0. Estas señales son una representación física de los valores *verdadero* y *falso*. La analogía viene dada por

$$\text{señal alta } = 1\,; \qquad \text{señal baja } = 0$$

Para cada operador lógico existe un circuito correspondiente. Los más básicos son:

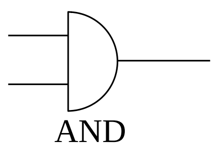
i) El circuito NOT



con tabla de verdad

E	S
1	0
0	1

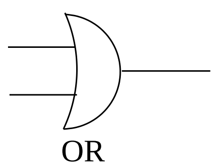
ii) El circuito AND



con tabla de verdad

E_1	E_2	S
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

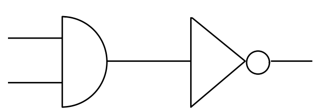
iii) El circuito OR



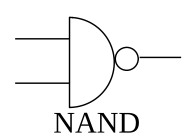
con tabla de verdad

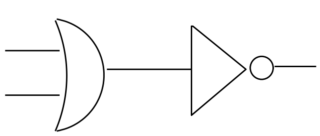
E_1	E_2	S
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A partir de estos circuitos básicos se pueden construir otros que realizan nuevas funciones lógicas. Por ejemplo

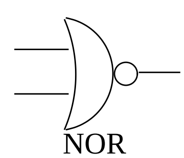


que se llama NAND y se simboliza



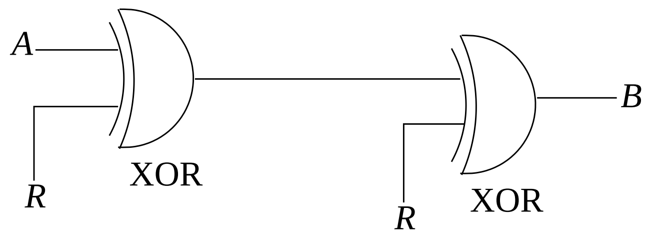


que se llama NOR y se simboliza



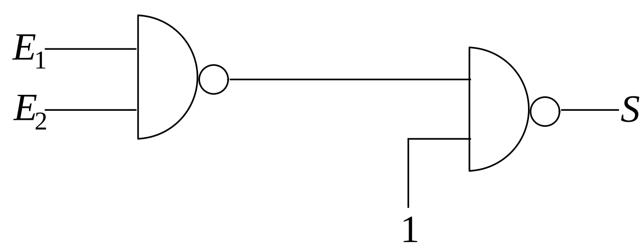
Ejercicio 1.

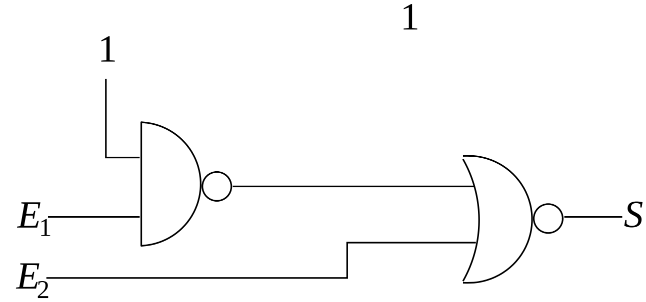
i) Construya un circuito OR usando sólo circuitos NOT y AND.
ii) Construya un circuito AND usando sólo circuitos NOT y OR.
iii) Construya un circuito XOR (OR exclusivo)
iv) Consideremos el circuito



Pruebe que, independientemente de cual sea la señal R, la señal que aparece en B es exactamente la misma que entra por A. Nota: Este circuito puede ser usado para transmitir mensajes cifrados. El primer XOR lo usa el transmisor y el segundo el receptor. La señal R es una señal de ruido que conocen ambos y que se usa en la entrada para modificar el mensaje antes de enviarlo y en la salida para recuperarlo.

v) Escriba las tablas de verdad de los siguientes circuitos



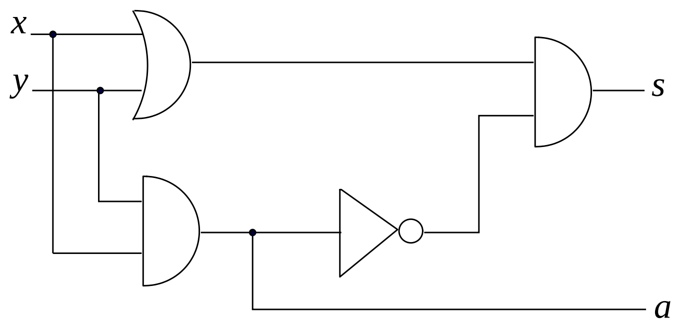


vi) Construir un circuito cuya tabla de verdad sea la siguiente:

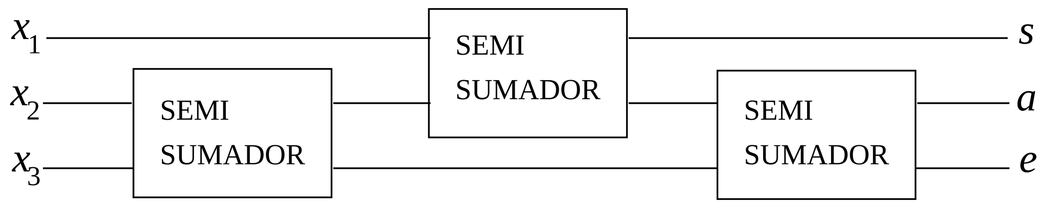
E_1	E_2	E_3	S
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es mostrar la vinculación que existe entre los operadores lógicos y la suma binaria.

i) Explique, mediante una tabla de verdad, qué salidas s y a se obtienen a partir de las entradas x e y en el siguiente circuito. Muestre además que si $a = 1$, entonces $s = 0$, $x = y = 1$.

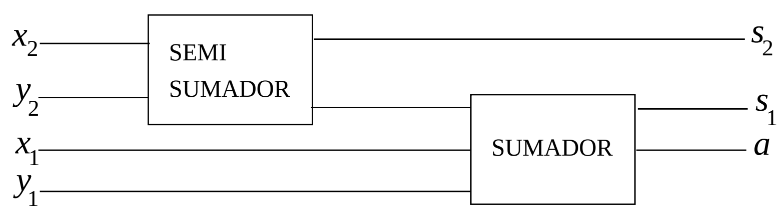


ii) Llamemos *semisumador* al circuito de la parte i) y consideremos el circuito:



a) Pruebe que $e = 0$ cualesquiera sean los valores de x_1, x_2 y x_3.
b) Pruebe que si $a = 0$, al menos dos de los valores de entrada son 0.
c) Pruebe que $s = a = 1$ únicamente cuando $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.
d) Resuma toda la información en una tabla de verdad.

iii) Llamemos *sumador* al circuito de la parte ii) y consideremos el circuito:



Pruebe que este circuito efectúa la suma binaria

$$\begin{array}{rr} + & x_1 x_2 \\ & y_1 y_2 \\ \hline & a\; s_1\, s_2 \end{array}$$

de los números de dos cifras binarias x_1x_2 e y_1y_2.

iv) Diseñe un circuito que efectúe la suma binaria de dos números de 8 cifras binarias:

$$\begin{array}{rr} + & x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 \\ & y_1\,y_2\,y_3\,y_4\,y_5\,y_6\,y_7\,y_8 \\ \hline & c\;\, s_1\,s_2\,s_3\,s_4\,s_5\,s_6\,s_7\,s_8 \end{array}$$