ALGEBRA I - Práctica N°2 - Primer cuatrimestre de 2002

Sucesiones. Principio de inducción.

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos encontrar la fórmula que exprese el término general a_n en función de n para alguna sucesión cuyos primeros términos sean:

i) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots$

ii) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots$

iii) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \dots$

iv) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots$

v) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \dots$

vi) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots$

vii) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots$

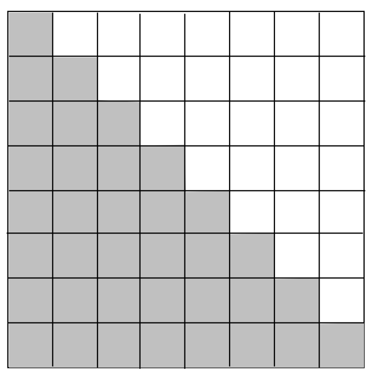
Ejercicio 2. Dada la igualdad

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

probarla $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

i) reagrupando los sumandos del miembro izquierdo de a pares: $1 + n$, $2 + (n - 1)$, $3 + (n - 2)$, $\dots$ (Sugerencia: considerar por separado los casos n par y n impar)

ii) teniendo en cuenta el diagrama



iii) usando el principio de inducción.

Ejercicio 3. Dada la igualdad

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

probarla $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

i) usando el principio de inducción

ii) sin usar el principio de inducción.

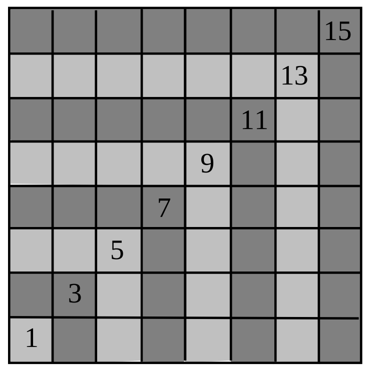
Ejercicio 4. Dada la igualdad

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

probarla $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

i) como corolario de los dos ejercicios anteriores

ii) teniendo en cuenta el diagrama



iii) usando el principio de inducción.

Ejercicio 5.

i) Reescribir las sumas indicadas en cada una de las siguientes fórmulas usando el símbolo $\sum$ y probar por inducción que las igualdades son verdaderas $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

ii) Dar una fórmula (sin usar el símbolo $\sum$) para la suma

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2$$

Justificar.

Ejercicio 6. Probar las siguientes igualdades $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{(2n+1)}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\ 2^{i-1} = 1 + (n-1)\ 2^n$

iii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n$

Ejercicio 7.

i) Fórmula de la suma de la sucesión geométrica de razón r: Probar que si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

¿Cuánto vale la suma cuando $r = 1$?

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Comparar con el ítem anterior.

Ejercicio 8. Probar las siguientes desigualdades $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

i) $2^n + 3^n \leq 5^n$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \geq n$

iii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{i+1} \geq n-1$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} > \frac{n}{2}$

Nota: La parte iv) del ejercicio muestra que la *serie armónica* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ es divergente.

Ejercicio 9. Desigualdad de Bernoulli: Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que $(1+a)^n \geq 1+na$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, vale:

i) $n! \geq 2^{n-1}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i! \geq \frac{2^n}{n+1}$

(*) iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n+k)\binom{n}{k} = 3 \cdot 2^{n-1} n$

Ejercicio 11. Probar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow 3^n \geq 2^{n+1} + n$

ii) $n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \Rightarrow 2^n > n^3$

iii) $n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i-1}}{i!} < 2(n-1)$

iv) $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow (2n)! > 8^{n-1}n^2$

Ejercicio 12. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

i) Probar que la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{(n^2-3n)}{2}$.

ii) Probar que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2) \cdot 180°$.

Ejercicio 13. Comparar el crecimiento de las siguientes sucesiones y ordenarlas de acuerdo a su crecimiento en función de n. Justificar cada desigualdad e indicar a partir de qué valor de n es verdadera.

$$n \qquad n^2 \qquad \log_2(n) \qquad 2^n \qquad \log_2(\log_2(n)) \qquad n\log_2(n) \qquad n!$$

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos encontrar una definición recursiva para alguna sucesión cuyos primeros términos sean:

i) $1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots$

ii) $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

iii) $1, \ 5, \ 14, \ 30, \ 55, \ \ldots$

iv) $1, \ 4, \ 9, \ 16, \ 25, \ \ldots$

v) $1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ \ldots$

vi) $1, \ 2, \ 6, \ 24, \ 120, \ 720, \ \ldots$

vii) $1, \ 0, \ 1, \ 0, \ 1, \ 0, \ \ldots$

viii) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Ejercicio 15.

i) Dada la sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ¿cuánto vale la suma $\sum_{i=n+1}^{m} (a_i - a_{i-1})$?

ii) Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, encontrar una expresión de a_n en función de n. (Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior.)

a) $a_1 = 1, \qquad a_{i+1} = a_i + \frac{i}{2} \quad (i \in \mathbb{N})$

b) $a_1 = 0, \qquad a_{i+1} = a_i + 2i \quad (i \in \mathbb{N})$

c) $a_1 = 1, \qquad a_{i+1} = a_i + i^2 \quad (i \in \mathbb{N})$

d) $a_1 = 1, \qquad a_{i+1} = a_i + i^3 \quad (i \in \mathbb{N})$

iii) Dar una fórmula para la suma $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$)

Ejercicio 16. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \ , \qquad a_{n+1} = \frac{2 \cdot (2n+1) \cdot a_n}{n+1} \ (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n} \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 17. Para las siguientes sucesiones definidas por recursión, conjeturar una fórmula general y probarla:

i) $a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1 \ (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = a_n + n.n! \ (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)^2 a_n \ (n \in \mathbb{N})$

iv) $a_1 = 1, \qquad a_2 = 4, \qquad a_{n+2} = 2\sqrt{a_n} + a_{n+1} + 3 \ (n \in \mathbb{N})$

v) $a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 3 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \ (n \in \mathbb{N})$

Ejercicio 18.

i) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n \leq 3^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$

iii) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente y está acotada superiormente por 2.

Ejercicio 19. Sucesión de Fibonacci: Se considera la sucesión definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \quad (i \in \mathbb{N})$. Probar los siguientes resultados donde $\phi = \dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$ y $\overline{\phi} = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}$.

i) $n \in \mathbb{N}, n > 1 \Rightarrow \phi^{n-2} \leq F_n \leq \phi^{n-1}$

ii) $\phi^n = F_n \cdot \phi + F_{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

iii) $\overline{\phi}^n = F_n \cdot \overline{\phi} + F_{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

iv) $F_n = \dfrac{(\phi^n - \overline{\phi}^n)}{\sqrt{5}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 20. Expresar el término general a_n de las siguientes sucesiones en función de los números de Fibonacci:

i) $a_0 = r, \qquad a_1 = s, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

ii) $b_0 = 0, \qquad b_1 = 1,\, b_{n+1} = b_n + b_{n-1} + c, \qquad (n \in \mathbb{N})$

Ejercicio 21.

i) Se define la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(n) = 1$ (la notación f^k significa la composición de f consigo misma k veces.)

ii) Se define la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(n) = 1$ ó 3.

iii) Se define la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n-1 \text{ es divisible por } 4 \\ 3n-1 & \text{si } n-3 \text{ es divisible por } 4 \end{cases}$$

Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(n) = 1$.

(*) **Ejercicio 22.** Relación entre la media aritmética y geométrica.

i) Probar que si $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sqrt{a \cdot b} \leq \dfrac{a+b}{2}$

Definición: Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos, se define la **media geométrica** entre ellos como el número $(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ y se define la **media aritmética** entre ellos como el número $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.
Se considera la siguiente proposición predicable sobre los números naturales:

$$P(n) : \text{Dados} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad ; \quad (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ii) Probar por inducción en k que $P(2^k)$ es verdadera $\forall\ k\ \in\ \mathbb{N}$.

iii) Probar que, si $n \geq 2$, $P(n) \Rightarrow P(n-1)$.

iv) Justificar, usando los dos ítems anteriores, que $P(n)$ es verdadera $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$.

Digresión histórica.

Lo que sigue fue extraído de [Donald E. Knuth, *The art of computer programming*, Vol 1, "Fundamental Algorithms," Addison - Wesley, Second Edition (1973), 78–80].

Números de Fibonacci.

La sucesión

$$0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots, \tag{1}$$

en la que cada número es la suma de sus dos precedentes, juega un papel importante en al menos una docena de algoritmos aparentemente no relacionados entre sí y que estudiaremos más adelante. Los números de la sucesión se denotan F_n, *y su definición formal es*

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0. \tag{2}$$

Esta famosa sucesión fue introducida en 1202 por Leonardo Pisano (Leonardo de Pisa), a quien a veces se llama Leonardo Fibonacci (Filius Bonaccii, hijo de Bonaccio). Su Liber Abbaci (Libro del Abaco) contiene el siguiente ejercicio: "¿Cuantas parejas de conejos se pueden producir a partir de una única pareja al cabo de un año?" Para resolver este problema se nos dice que supongamos que cada pareja produce una nueva pareja de hijos cada mes, cada pareja es fértil a la edad de un mes, y además, los conejos nunca mueren. Después de un mes habrá 2 parejas de conejos; despues de dos meses, habrá 3; al mes siguiente la pareja original y la nacida durante el primer mes agregarán ambas una nueva pareja y habrá 5 en total; y así sucesivamente.

Fibonacci fue lejos el más grande matemático europeo antes del Renacimiento. Estudió el trabajo de al-Khowârizmî (de quien proviene la palabra "algoritmo") y agregó numerosas contribuciones originales a la aritmética y geometría. Los escritos de Fibonacci fueron reeditados en 1857 [B. Boncompagni, Scritti di Leonardo Pisano (Rome, 1857–1862), 2 vols.; F_n *aparece en el Vol. 1, pp. 283–285]. El problema de los conejos, por supuesto, no fue enunciado como una aplicación práctica a la biología y la explosión poblacional; fue un ejercicio más. De hecho, da lugar aún a un buen ejercicio de computación relacionado con la suma [...].*

La misma sucesión también aparece en el trabajo de Kepler, 1611, en conexión con "phyllotaxis," el estudio de la diposición de hojas y flores en la vida de las plantas. Kepler presumiblemente no estaba al tanto de la breve mención de Fibonacci de la sucesión. Los números de Fibonacci se han observado frecuentemente en la naturaleza, probablemente por razones similares a las suposiciones originales del problema de los conejos.
Una primera indicación de las conexiones íntimas entre F_n y los algoritmos salió a la luz en 1844, cuando G. Lamé usó la sucesión de Fibonacci para estudiar la eficiencia del algoritmo de Euclides [...]. Esta fue la primera aplicación práctica de la sucesión de Fibonacci. Cincuenta años más tarde el matemático E. Lucas obtuvo resultados muy profundos acerca de los números de Fibonacci, y en particular, los usó para probar que el número de 39 dígitos $2^{127}-1$ es primo. Lucas dió el nombre de "números de Fibonacci" a la sucesión F_n, y ese nombre ha sido usado desde entonces.
Ya hemos examinado brevemente la sucesión de Fibonacci y encontramos que $\phi^{n-2} \leq F_n \leq \phi^{n-1}$, si n es un entero positivo y si

$$\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \tag{3}$$

Veremos un poco más adelante que esta cantidad, ϕ, está íntimamente conectada con los números de Fibonacci.
El mismo número ϕ tiene una historia interesante. Euclides lo llamó "la razón media y extrema"; la razón de A a B es la razón de $(A+B)$ a A, si la razón de A a B es ϕ. Escritores del renacimiento la llamaron "razón aurea." En el mundo del arte, se dice que la razón de ϕ a 1 es la proporción estéticamente más placentera, y esta opinión también está confirmada desde el punto de vista de la estética de la programación de computadoras. Para la historia de ϕ, vea el excelente artículo "The Golden Section, Phyllotaxis and Wythoff's Game" por H. S. M. Coxeter, Scripta Math. **19** *(1953), 135–143, y vea también el Capítulo 8 de* The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, *por Martin Gardner (New York: Simon and Schuster, 1961).*
[...] *La designación ϕ viene del nombre del artista griego Phidias quien dijo haber usado frecuentemente la razon aurea en sus esculturas.* [...].

Aplicaciones: Inducción y Complejidad.

Cada vez que se escribe una introducción al Principio de Inducción se comienza con el ejemplo:

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Uno se pregunta ¿para qué puede servir esta igualdad?

Ejemplo: Consideremos el siguiente algoritmo que encuentra una *clave* entre los elementos de una sucesión:

ENTRADAS:

- Una sucesión de n elementos distintos entre sí $a_1, a_2, \ldots, a_n$
- Una clave b que está entre los valores de la sucesión

SALIDA:

- Un valor i que está entre 1 y n y verifica $a_i = b$

1. [Inicializa] $i := 1$
2. [Compara] Si $a_i = b$, entonces fin (se encontró la clave)
3. [Incrementa] $i := i + 1$
4. [Repite] Volver a 2

Evidentemente la cantidad de veces que se efectúa el paso 2 depende de los datos de entrada. Si fijamos la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tenemos n posibilidades para b, ya que éste debe ser igual a alguno de los a_i. La siguiente tabla muestra la cantidad de veces que la comparación 2 debe realizarse según sea el valor de b

b	**2**
a_1	1
a_2	2
$\vdots$	$\vdots$
a_n	n

En promedio, la cantidad de veces que se va a ejecutar la comparación del paso 2 es:

$$P(n) = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} \tag{1}$$

El valor $P(n)$ nos da una idea de la *complejidad promedio*

inherente al algoritmo. Es una cantidad independiente de los datos de entrada y sirve para estimar el tiempo que cabe esperar que, en promedio, tarde el algoritmo.

Es difícil hacerse una idea de la magnitud de $P(n)$ a partir de la expresión (1) cuando n toma diferentes valores. Sin embargo gracias a la fórmula que tenemos para la suma de los n primeros números naturales, obtenemos:

$$P(n) = \frac{(n+1)}{2}$$

Ahora podemos ver que $P(n)$ tiene un comportamiento *lineal*, es una cantidad *aproximadamente* igual a $\frac{n}{2}$.

Este tipo de estimaciones o aproximaciones es de enorme utilidad cuando se quiere medir el tiempo que va a tardar en ejecutarse un algoritmo. Normalmente interesa conocer la complejidad del caso más favorable, la del caso menos favorable y la del caso promedio.

En el ejemplo de arriba, la complejidad del caso más favorable es 1 ya que esto se da cuando $b = a_1$. El caso menos favorable tiene complejidad n y ocurre cuando $b = a_n$. Es interesante notar que en este ejemplo la complejidad promedio coincide con el promedio entre los casos más favorable y menos favorable y que este hecho es evidente solamente después de usar la consabida fórmula:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Conviene remarcar que la complejidad promedio *no* siempre es igual al promedio entre los casos más favorable y menos favorable. Que eso ocurra en este ejemplo es una coincidencia que se debe a la naturaleza del problema.

Ejemplo: El problema es ahora el siguiente: Se tiene una sucesión desordenada a_1, a_2, $\ldots$, a_n de n elementos distintos entre sí y se desea ordenarla.

Existe una variedad importante de algoritmos que resuelven el problema. Uno de ellos es el denominado *burbujeo*.

Si bien los elementos a_i pueden ser palabras que deseamos ordenar alfabéticamente o números que queremos ordenar en forma decreciente o fechas que para compararlas tenemos que mirar primero los años, después los meses y por último los días, lo cierto es que siempre estamos frente a una lista de n ojetos sujetos a un orden lineal.

Para fijar ideas podemos suponer que queremos ordenarlos en forma creciente. El algoritmo de burbujeo consiste en recorrer la sucesión dada e ir comparando cada término con el siguiente. Cada vez que el resultado de esa comparación sea contrario al buscado, se intercambiarán ambos términos. Una vez recorrida toda la sucesión, se vuelve a empezar desde el primer lugar y se repite el procedimiento. El algoritmo termina después de la primer pasada en la que no se ha efectuado intercambio alguno.

Entradas:

- Un número natural $n > 1$
- Una sucesión de n elementos a_1, $\ldots$, a_n dados en un cierto orden

Salida:

- La sucesión a_1, $\ldots$, a_n, pero reordenada de forma creciente.

1. [Inicializa] $j := n$
2. [Bucle Principal] $i := 1$, *flag*$:= 0$
3. [Compara] Si $a_i < a_{i+1}$, ir a 6
4. [Intercambia] $aux := a_i$, $a_i := a_{i+1}$, $a_{i+1} := aux$
5. [Avisa] *flag*$:= 1$
6. [Incrementa] $i := i + 1$
7. [Continúa?] Si $i < j$, ir a 3
8. [Decrementa] $j := j - 1$
9. [Fin?] Si *flag*$= 0$ o $j = 1$, fin del algoritmo
10. [Repite] Ir a 2

Ejemplo: Apliquemos el algoritmo para ordenar la sucesión $(2, 4, 1, 3)$

$$(2,\ 4,\ 1,\ 3) \to (2,\ 1,\ 3,\ 4) \to (1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Cuando $j = 4$, se intercambian 4 con 1 y luego 4 con 3. Ahora $j = 3$ y se intercambia 1 con 2. A continuación $j = 2$ pero ya no hay más intercambios que efectuar.

Ejercicio 1. Aplique el algoritmo anterior para ordenar la sucesión

$$7,\ 1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 3,\ 2,\ 6,\ 8$$

y cuente la cantidad de veces que se efectúa el paso 5.

Para medir la complejidad vamos a contar la cantidad de veces que se ejecuta el paso 4 que intercambia dos elementos consecutivos.

Ejercicio 2. Determine en qué condiciones se produce el caso más favorable y calcule su complejidad.

Ejercicio 3. Determine en qué condiciones se produce el caso más desfavorable y calcule su complejidad.

Ejercicio 4. (Búsqueda binaria) Supongamos ahora que la sucesión en la que queremos encontrar una clave está ordenada en forma creciente. El problema de determinar la posición que ocupa la clave en la sucesión dada puede resolverse más eficientemente con el siguiente algoritmo.

ENTRADAS:

– Una sucesión de n elementos distintos entre sí $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ordenada en forma creciente.

– Una clave b que está entre los valores de la sucesión.

SALIDA:

– Un valor m que está entre 1 y n y verfica $a_m = b$.

1. [Inicializa] $i := 1$, $j := n$
2. [Divide] $m := \left[\frac{i+j}{2}\right]$ (parte entera)
3. [Compara] Si $a_m = b$, entonces fin (se encontró la clave)
4. [Cambia límites] Si $b < a_m$, entonces $j := m - 1$; si no, entonces $i := m + 1$
5. [Repite] Volver a 2.

Aplique este algoritmo a algunas situaciones concretas y una vez que lo haya entendido, obtenga la complejidad del peor caso siguiendo los pasos que indicamos a continuación. Para eso llamemos c_n a la cantidad de veces que se ejecuta el paso 3 como máximo cuando la sucesión tiene n elementos.

i) Pruebe que $c_1 = 1$ y que en general $c_n = 1 + c_{\left[\frac{n}{2}\right]}$. (Indicación: Cada vez que se entra al paso 2 solamente se considera la sucesión $a_i, \ldots, a_j$ que tiene $j - i + 1$ elementos. Trate separadamente los casos $j - i + 1$ par y $j - i + 1$ impar)
ii) Suponga que $n = 2^k$ y resuelva en este caso la recurrencia encontrada en (i). (Indicación: defina $d_j := c_{2^j}$ y encuentre una recurrencia para los d_j)
iii) Demuestre inductivamente que $c_n = 1 + [\lg n]$.

Ejercicio 5. Estudie la complejidad del siguiente algoritmo (es decir, determine la cantidad de sumas y restas que efectúa en función de n)

ENTRADA:

– Un entero no negativo n.

SALIDA:

– Un valor j que es igual al $n$ésimo número de Fibonacci.

1. [Inicializa] $k := 1$, $i := 1$, $j := 0$
2. [Fin] Si $k > n$, fin.
3. [Calcula] $j := i + j$, $i := j - i$
4. [Incrementa] $k := k + 1$
5. [Repite] Volver a 2.

De paso, demuestre que efectivamente a la salida del algoritmo el valor de j es F_n.

Juegos matemáticos.

Dos jugadores compiten en el siguiente juego: Hay n fósforos sobre una mesa; el primer jugador quita cualquier cantidad de fósforos excepto que no puede sacarlos todos. De ahí en adelante, los jugadores participan alternadamente quitando cada vez uno o más fósforos *pero no más que dos veces la cantidad de fósforos que ha tomado el jugador precedente*. El jugador que se lleva el último fósforo gana. (Por ejemplo, suponga que $n = 11$; el jugador A quita 3 fósforos; el jugador B puede quitar hasta 6 fósforos, y toma 1. Quedan 7 fósforos; el jugador A puede tomar 1 o 2, y toma 2; el jugador B puede sacar hasta 4, y saca 1. Quedan 4; el jugador A ahora quita 1; el jugador B debe tomar por lo menos 1 fósforo y el jugador A gana en la siguiente vuelta.) [Donald E. Knuth, *The art of computer programming*.]

Este juego tiene una solución matemática sencilla (aunque no es sencillo descubrirla). Se puede dar un algoritmo que juege de forma óptima. Aunque no parezca, en la solución aparecen los números de Fibonacci. Más adelante, se verá la solución.