

ALGEBRA I - Práctica N°3 - Primer cuatrimestre de 2002

Respuestas:

1. Combinatoria

Ejercicio 1. Se lanza una moneda 3 veces. ¿Cuántos resultados pueden obtenerse?

Respuesta: 8

Ejercicio 2. Hay 3 rutas distintas para ir de la ciudad A a la ciudad B y 4 rutas distintas para ir de la ciudad B a la ciudad C. Calcular el número total de rutas para:

- i) ir de la ciudad A a la ciudad C pasando por la ciudad B.

Respuesta: 12

- ii) Ir de la ciudad A a la ciudad C ida y vuelta vía la ciudad B.

Respuesta: 144

- iii) Ir de la ciudad A a la ciudad C ida y vuelta vía la ciudad B volviendo por caminos distintos en ambos tramos.

Respuesta: 72

- iv) Ir de la ciudad A a la ciudad C ida y vuelta vía la ciudad B volviendo por una ruta diferente (es decir, que difiere en **algún** tramo).

Respuesta: 132

Ejercicio 3. Dados los dígitos 2, 3, 4, 5 y 6

- i) ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con ellos?

Respuesta: 625

- ii) ¿Cuántos números de cuatro cifras que sean capicúas?

Respuesta: 25

- iii) ¿Cuántos números de cuatro cifras menores que 5000?

Respuesta: 375

- iv) ¿Cuántos números de cuatro cifras que tengan todas sus cifras distintas?

Respuesta: 120

- v) ¿Cuántos números de cuatro cifras que empiecen con un dígito par?

Respuesta: 375

- vi) ¿Cuántos números de cuatro cifras capicúas y que empiecen con un dígito par?

Respuesta: 15

- vii) ¿Cuántos números pares de cuatro cifras?

Respuesta: 375

- viii) ¿Cuántos números pares de cuatro cifras y con todas sus cifras distintas?

Respuesta: 72

Ejercicio 4. En la oficina A de una empresa trabajan 30 hombres y 22 mujeres. En la oficina B, 14 hombres y 23 mujeres. Se quiere formar un equipo de 2 personas, una de cada oficina. Decidir cuántos equipos distintos pueden formarse si:

- i) El equipo debe estar formado por un hombre y una mujer.

Respuesta: 998

- ii) En el equipo debe haber al menos un hombre.

Respuesta: 1418

- iii) En el equipo debe haber al menos una mujer.

Respuesta: 1504

Ejercicio 5. Se dispone de un sistema para enviar señales con puntos y rayas.

- i) ¿Cuántas señales pueden transmitirse con sucesiones de exactamente 8 signos?

Respuesta: 256

- ii) ¿Cuántas señales pueden transmitirse con sucesiones de **a lo sumo** 8 signos?

Respuesta: 510

Ejercicio 6. Se tiran dos dados, uno verde y el otro rojo.

- i) ¿Cuántos resultados distintos hay?

Respuesta: 36

- ii) ¿Cuántos resultados distintos hay en que la suma de los puntos sea 8?

Respuesta: 5

- iii) ¿Cuántos resultados distintos hay en que los dos dados tengan distinto puntaje?

Respuesta: 30

- iv) ¿Cuántos resultados distintos hay para una persona que no distingue los colores?

Respuesta: 21

Ejercicio 7. ¿Cuántos números entre 1200 y 3522 pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 sin repetir dígitos?

Respuesta: 305

Ejercicio 8.

- i) ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 17 libros distintos en tres cajas diferentes?

Respuesta: 3^{17}

- ii) ¿De cuántas maneras si ninguna caja debe quedar vacía?

Respuesta: $3^{17} - 3 \cdot 2^{17} + 3$

Ejercicio 9. Si un sábado a la noche salen 3 chicas y 3 muchachos, ¿de cuántas maneras se pueden formar 3 parejas?

Respuesta: 6

Ejercicio 10. Decidir de cuántas formas puede fotografiarse una familia de 5 personas puestas en hilera en cada uno de los siguientes casos:

- i) Si no hay restricciones.

Respuesta: 120

- ii) Si la madre y el padre deben estar siempre juntos.

Respuesta: 48

- iii) Si la madre y el padre deben estar siempre juntos, la madre a la izquierda del padre.

Respuesta: 24

- iv) Si la madre debe estar siempre a la izquierda del padre.

Respuesta: 60

- v) Si la madre, el padre y el hijo menor deben aparecer siempre juntos.

Respuesta: 36

Ejercicio 11.

- i) ¿De cuántas formas pueden fotografiarse 6 mujeres y 7 varones puestos en hilera, de manera tal que nunca aparezcan juntas 2 personas del mismo sexo?

Respuesta: 3628800

- ii) ¿De cuántas formas si son 7 las mujeres y 7 los varones?

Respuesta: 50803200

Ejercicio 12.

- i) ¿De cuántas formas pueden sentarse 10 personas alrededor de una mesa circular?

Respuesta: 362880

- ii) ¿De cuántas formas si dos personas determinadas no pueden estar juntas?

Respuesta: 282240

- iii) ¿De cuántas formas si dos personas determinadas deben estar siempre juntas?

Respuesta: 80640

Ejercicio 13.

- i) ¿De cuántas formas pueden fotografiarse 8 matrimonios en hilera con la condición de que cada marido esté al lado de su esposa?

Respuesta: 10321920

- ii) ¿De cuántas formas pueden ubicarse 8 matrimonios alrededor de una mesa circular con la condición que cada marido esté al lado de su esposa?

Respuesta: 1290240

Ejercicio 14. Se desea cubrir 10 cursos de Algebra con un docente cada uno y se dispone de 10 docentes.

- i) ¿De cuántas formas puede hacerse la distribución?

Respuesta: 3628800

- ii) Si de los 10 cursos, 2 son nocturnos y 4 de los 10 docentes no pueden concurrir a la noche, ¿cuántas distribuciones distintas pueden hacerse?

Respuesta: 1209600

Ejercicio 15. Un electricista debe conectar 8 cables diferentes, cada uno a un tornillo de un aparato. Los cables están coloreados y los tornillos a los que se han de conectar están identificados con números. El electricista olvidó la tabla que indica cómo efectuar las 8 conexiones, con el inconveniente adicional que el aparato sólo funcionará si se efectúan todas las conexiones de la manera correcta y, en caso contrario, no dará ninguna señal que permita establecer si al menos alguna conexión está bien hecha. Cada intento le demanda 1 minuto de trabajo. ¿Le conviene intentar sistemáticamente o viajar durante 3 horas para ir a buscar la tabla y volver?

Respuesta: 40320 min > 180 min. Le conviene viajar.

Ejercicio 16. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra NEUQUEN?

Respuesta: 630

Ejercicio 17.

- i) ¿Cuántos números distintos pueden formarse permutando los dígitos de 11122333345?

Respuesta: 138600

- ii) ¿Cuántos números distintos pueden formarse permutando los dígitos de 11223334500?

Respuesta: 680400 (que no empiecen con cero)

- iii) ¿Cuántos números distintos pueden formarse permutando los dígitos de 111222000?

Respuesta: 1120 (que no empiecen con cero)

Ejercicio 18. ¿Cuántas palabras de cuatro letras tomadas de la palabra TOPOLOGIA pueden formarse con la condición de que contengan **al menos** una vocal?

Respuesta: 1020

Ejercicio 19. ¿En cuántas formas pueden permutarse las letras de la palabra BONETERO manteniendo las consonantes en su orden relativo original?

Respuesta: 420

Ejercicio 20. En una jaula hay un león, un tigre, un jabalí, una hiena y un zorro. Al abrirse la puerta los animales salen de a uno.

- i) ¿De cuántas maneras pueden salir si el león debe salir antes que el zorro?

Respuesta: 60

- ii) ¿De cuántas maneras si el león debe salir antes que el tigre y el tigre antes que el zorro?

Respuesta: 20

Ejercicio 21. ¿De cuántas maneras pueden elegirse 4 docentes para un curso de Algebra si hay 12 docentes disponibles?

Respuesta: 495

Ejercicio 22. Se consideran 10 puntos en el plano no alineados de a tres. ¿Cuántos triángulos con vértices en esos puntos quedan determinados? Generalizar el resultado a n puntos.

Respuesta: 120 ; $\binom{n}{3}$

Ejercicio 23.

- i) Dadas dos rectas paralelas del plano, n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos quedan determinados con vértices en esos puntos?

Respuesta: $\frac{n \cdot (n-1) \cdot m + m \cdot (m-1) \cdot n}{2}$

- ii) Dado un cuadrado en el plano y 10 puntos distintos y diferentes de los vértices en cada lado del cuadrado, calcular cuántos triángulos con vértices en esos 40 puntos quedan determinados.

Respuesta: 9400

- iii) Sobre tres rectas paralelas (y distintas) del plano se marcan respectivamente m , n y r puntos. Suponiendo que al tomar un punto de cada recta nunca resulten alineados, ¿cuántos triángulos con vértices en esos puntos quedan determinados?

Respuesta: $\frac{(m+n+r) \cdot (m+n+r-1) \cdot (m+n+r-2) - m \cdot (m-1) \cdot (m-2) - n \cdot (n-1) \cdot (n-2) - r \cdot (r-1) \cdot (r-2)}{6}$

Ejercicio 24. Dadas n rectas paralelas y m rectas paralelas de distinta dirección, calcular el número total de paralelogramos que determinan por intersección.

Respuesta: $\frac{n \cdot (n-1) \cdot m \cdot (m-1)}{4}$

Ejercicio 25. Cuatro personas juegan con un mazo de 40 cartas. ¿Cuál es el número total de manos que se pueden dar, si cada jugador recibe 10 cartas?

Respuesta: $\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}$

Ejercicio 26. En una oficina hay 15 empleados y deben distribuirse por igual en tres turnos. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Respuesta: 756756

Ejercicio 27. Entre 10 ingenieros y 8 abogados debe elegirse una comisión de cinco miembros integrada por más ingenieros que abogados. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse?

Respuesta: 5292

Ejercicio 28. ¿En cuántas formas pueden ubicarse 5 personas en los 20 asientos numerados de un colectivo?

Respuesta: 1860480

Ejercicio 29. Se desea distribuir 15 bolillas indistinguibles en 7 casilleros.

- i) ¿Cuántos resultados posibles hay?

Respuesta: 54264

- ii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que el casillero 1 esté vacío?

Respuesta: 15504

- iii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que algún casillero esté vacío?

Respuesta: 51261

- iv) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que el casillero 2 tenga exactamente 4 bolillas?

Respuesta: 4368

- v) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que ningún casillero quede vacío?

Respuesta: 3003

- vi) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que exactamente un casillero esté vacío?

Respuesta: 14014

- vii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que el casillero 1 esté vacío y el casillero 2 tenga exactamente 4 bolillas?

Respuesta: 1365

viii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que los tres últimos casilleros contengan un total de 7 bolillas?

Respuesta: 5940

Ejercicio 30.

i) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas en 10 jaulones distintos?

Respuesta: $\binom{17}{8}$

ii) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 11 canarios en 10 jaulones distintos?

Respuesta: $\binom{20}{11}$

iii) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas y 11 canarios en 10 jaulones distintos?

Respuesta: $\binom{17}{8} \cdot \binom{20}{11}$

iv) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas y 11 canarios en 10 jaulones distintos con la condición de que no haya más de una paloma por jaulón?

Respuesta: $45 \cdot \binom{20}{11}$

v) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas y 11 canarios en 12 jaulones distintos de forma tal que haya a lo sumo una paloma y un canario por jaulón?

Respuesta: 5940

Ejercicio 31. Se extraen 10 bolillas de una caja que contiene 10 bolillas rojas, 10 verdes, 10 blancas y 10 azules. ¿Cuántos resultados posibles hay?

Respuesta: 286

Ejercicio 32.

i) ¿En cuántas formas es posible descomponer el número natural n como suma de k sumandos enteros mayores o iguales que 0? Por ejemplo, si $k = 2$ y $n = 4$ se tienen las descomposiciones

$$0 + 4 = 4 + 0 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2$$

Respuesta: $\binom{n+k-1}{n}$

ii) ¿En cuántas formas es posible descomponer el número natural n como suma de k números naturales? Escribir las 20 particiones de 7 en la suma de 4 números naturales.

Respuesta: $\binom{n-1}{n-k}$ si $n \geq k$; 0 si no.

Ejercicio 33. Una persona va a apostar 10 pesos en una carrera en la que intervienen 5 caballos. ¿De cuántas formas distintas podrá hacerlo si cada boleto vale 2 pesos?

Respuesta: 126

Ejercicio 34. En la puerta de un banco hay 15 jubilados esperando para cobrar sus respectivas pensiones. Si hay 4 cajas que efectúan el pago:

i) ¿De cuántas formas pueden distribuirse en las cajas para cobrar?

Respuesta: $816 \cdot (15!)$

ii) ¿De cuántas formas pueden distribuirse sin dejar ninguna caja vacía?

Respuesta: $364 \cdot (15!)$

iii) ¿De cuántas formas pueden hacerlo si en la caja 1 no se admiten más de 3 personas?

Respuesta: $(15!) \cdot 452$

Ejercicio 35. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 6 chicas y 10 muchachos en una fila si se quiere que nunca haya dos chicas juntas?

Respuesta: $462 \cdot (6!) \cdot (10!)$

Ejercicio 36. Dado el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

i) ¿De cuántas formas pueden extraerse tres números de tal modo que su producto sea múltiplo de:

a) 8?

c) 14?

b) 7?

d) 11?

Respuesta: (todos distintos y sin considerar el orden) a) 39 b) 28 c) 22 d) 0

ii) ¿De cuántas formas se pueden extraer tres números de tal modo que su suma sea impar?

Respuesta: (todos distintos y sin considerar el orden) 40

Ejercicio 37. Decidir cuántos números de 6 dígitos múltiplos de 4 pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 6 y 8 si

- i) los dígitos no se pueden repetir.

Respuesta: 240

- ii) los dígitos se pueden repetir.

Respuesta: 15552

Ejercicio 38. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 de manera que el 2 aparezca una cantidad impar de veces?

Respuesta: 2016

Ejercicio 39. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 6 y 7 con la condición de que la suma de sus cifras sea par?

Respuesta: 8177

Ejercicio 40. Si A tiene n elementos y B tiene m , ¿cuántas relaciones existen en $A \times B$?

Respuesta: $2^{n \cdot m}$

Ejercicio 41. Sea X un conjunto de n elementos

- i) ¿Cuántas relaciones pueden definirse en X ?

Respuesta: 2^{n^2}

- ii) ¿Cuántas relaciones reflexivas?

Respuesta: 2^{n^2-n}

- iii) ¿Cuántas relaciones simétricas?

Respuesta: $2^{\frac{n^2+n}{2}}$

- iv) ¿Cuántas relaciones reflexivas y simétricas al mismo tiempo?

Respuesta: $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

- v) ¿Cuántas relaciones antisimétricas?

Respuesta: $3^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot 2^n$

- vi) ¿Cuántas relaciones reflexivas y antisimétricas al mismo tiempo?

Respuesta: $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

Ejercicio 42. ¿De cuántas maneras se puede partir en dos subconjuntos no vacíos un conjunto de n elementos? ¿Y en tres?

Respuesta: Sin considerar el orden de los subconjuntos: $\frac{2^n-2}{2}$; $\frac{3^n-3 \cdot 2^n+3}{6}$

2. Cálculo elemental de probabilidades

Ejercicio 43. Se elige al azar un número de 6 cifras. Calcular la probabilidad de que todas las cifras sean diferentes.

Respuesta: $\frac{136080}{900000}$

Ejercicio 44. ¿Cuál es la probabilidad de sacar boleto capicúa?

Respuesta: (con 5 dígitos) $\frac{1}{100}$

Ejercicio 45. Se eligen al azar n elementos de un conjunto que tiene m elementos ¿Cuál es la probabilidad de que los n elementos elegidos sean diferentes entre sí?

Respuesta: $\frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)}{m^n}$ si $n \leq m$; 0 si no.

Ejercicio 46. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número al azar entre 1 y 50 éste resulte primo?

Respuesta: 0,3

Ejercicio 47. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un número entero de dos cifras resulte ser un cuadrado?

Respuesta: $\frac{1}{15}$

Ejercicio 48. Calcular la probabilidad de que al extraer una carta de un mazo de 40 cartas españolas:

- i) resulte ser un as.

Respuesta: $\frac{1}{10}$

- ii) resulte ser de copas.

Respuesta: $\frac{1}{4}$

- iii) salga el as de copas.

Respuesta: $\frac{1}{40}$

- iv) salga una figura.

Respuesta: $\frac{3}{10}$

Ejercicio 49. Calcular la probabilidad de que al extraer dos cartas de un mazo de 40 cartas españolas:

- i) las dos sean pares.

Respuesta: $\frac{19}{78}$

- ii) una sea par y otra impar.

Respuesta: $\frac{20}{39}$

- iii) ambas tengan la misma paridad.

Respuesta: $\frac{19}{39}$

- iv) al menos una de ellas sea un 2.

Respuesta: $\frac{5}{26}$

- v) exactamente una de ellas sea de oro.

Respuesta: $\frac{5}{13}$

- vi) salga el 2 de oro.

Respuesta: $\frac{1}{20}$

- vii) las dos tengan el mismo número.

Respuesta: $\frac{1}{13}$

Ejercicio 50. Calcular la probabilidad de que al tirar tres veces una moneda:

- i) las dos primeras sean caras.

Respuesta: $\frac{1}{4}$

- ii) las dos primeras sean iguales.

Respuesta: $\frac{1}{2}$

- iii) salgan más cecas que caras.

Respuesta: $\frac{1}{2}$

Ejercicio 51. Calcular la probabilidad de que, de 10 personas alineadas al azar, dos determinadas queden juntas.

Respuesta: $\frac{1}{5}$

Ejercicio 52. Se deben entregar doce cartas distintas a doce destinatarios distintos. Si las cartas se entregan al azar, calcular la probabilidad de que todas las cartas sean entregadas a sus verdaderos destinatarios.

Respuesta: $\frac{1}{12!}$

Ejercicio 53.

- i) ¿Cuál es la probabilidad de que 12 personas determinadas tengan sus fechas de nacimiento en 12 diferentes meses?

Respuesta: $\frac{12!}{12^{12}}$

- ii) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 personas determinadas tengan sus fechas de nacimiento en junio?

Respuesta: $\frac{1}{12^2}$

- iii) ¿Cuál es la probabilidad de que 6 personas dadas tengan sus fechas de nacimiento en 3 meses diferentes pero de a 2 coincidentes? (Por ejemplo, 2 nacieron en junio, 2 en febrero y 2 en abril.)

Respuesta: $\frac{275}{41472}$