ALGEBRA I - Práctica N°3 - Primer cuatrimestre de 2002

1. Combinatoria

Ejercicio 1. Se lanza una moneda 3 veces. ¿Cuántos resultados pueden obtenerse?

Ejercicio 2. Hay 3 rutas distintas para ir de la ciudad A a la ciudad B y 4 rutas distintas para ir de la ciudad B a la ciudad C. Calcular el número total de rutas para:

i) ir de la ciudad A a la ciudad C pasando por la ciudad B.

ii) Ir de la ciudad A a la ciudad C ida y vuelta vía la ciudad B.

iii) Ir de la ciudad A a la ciudad C ida y vuelta vía la ciudad B volviendo por caminos distintos en ambos tramos.

iv) Ir de la ciudad A a la ciudad C ida y vuelta vía la ciudad B volviendo por una ruta diferente (es decir, que difiere en **algún** tramo).

Ejercicio 3. Dados los dígitos 2, 3, 4, 5 y 6

i) ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con ellos?

ii) ¿Cuántos números de cuatro cifras que sean capicúas?

iii) ¿Cuántos números de cuatro cifras menores que 5000?

iv) ¿Cuántos números de cuatro cifras que tengan todas sus cifras distintas?

v) ¿Cuántos números de cuatro cifras que empiecen con un dígito par?

vi) ¿Cuántos números de cuatro cifras capicúas y que empiecen con un dígito par?

vii) ¿Cuántos números pares de cuatro cifras?

viii) ¿Cuántos números pares de cuatro cifras y con todas sus cifras distintas?

Ejercicio 4. En la oficina A de una empresa trabajan 30 hombres y 22 mujeres. En la oficina B, 14 hombres y 23 mujeres. Se quiere formar un equipo de 2 personas, una de cada oficina. Decidir cuántos equipos distintos pueden formarse si:

i) El equipo debe estar formado por un hombre y una mujer.

ii) En el equipo debe haber al menos un hombre.

iii) En el equipo debe haber al menos una mujer.

Ejercicio 5. Se dispone de un sistema para enviar señales con puntos y rayas.

i) ¿Cuántas señales pueden transmitirse con sucesiones de exactamente 8 signos?

ii) ¿Cuántas señales pueden transmitirse con sucesiones de **a lo sumo** 8 signos?

Ejercicio 6. Se tiran dos dados, uno verde y el otro rojo.

i) ¿Cuántos resultados distintos hay?

ii) ¿Cuántos resultados distintos hay en que la suma de los puntos sea 8?

iii) ¿Cuántos resultados distintos hay en que los dos dados tengan distinto puntaje?

iv) ¿Cuántos resultados distintos hay para una persona que no distingue los colores?

Ejercicio 7. ¿Cuántos números entre 1200 y 3522 pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 sin repetir dígitos?

Ejercicio 8.

i) ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 17 libros distintos en tres cajas diferentes?

ii) ¿De cuántas maneras si ninguna caja debe quedar vacía?

Ejercicio 9. Si un sábado a la noche salen 3 chicas y 3 muchachos, ¿de cuántas maneras se pueden formar 3 parejas?

Ejercicio 10. Decidir de cuántas formas puede fotografiarse una familia de 5 personas puestas en hilera en cada uno de los siguientes casos:

i) Si no hay restricciones.

ii) Si la madre y el padre deben estar siempre juntos.

iii) Si la madre y el padre deben estar siempre juntos, la madre a la izquierda del padre.

iv) Si la madre debe estar siempre a la izquierda del padre.

v) Si la madre, el padre y el hijo menor deben aparecer siempre juntos.

Ejercicio 11.

i) ¿De cuántas formas pueden fotografiarse 6 mujeres y 7 varones puestos en hilera, de manera tal que nunca aparezcan juntas 2 personas del mismo sexo?

ii) ¿De cuántas formas si son 7 las mujeres y 7 los varones?

Ejercicio 12.

i) ¿De cuántas formas pueden sentarse 10 personas alrededor de una mesa circular?

ii) ¿De cuántas formas si dos personas determinadas no pueden estar juntas?

iii) ¿De cuántas formas si dos personas determinadas deben estar siempre juntas?

Ejercicio 13.

i) ¿De cuántas formas pueden fotografiarse 8 matrimonios en hilera con la condición de que cada marido esté al lado de su esposa?

ii) ¿De cuántas formas pueden ubicarse 8 matrimonios alrededor de una mesa circular con la condición que cada marido esté al lado de su esposa?

Ejercicio 14. Se desea cubrir 10 cursos de Algebra con un docente cada uno y se dispone de 10 docentes.

i) ¿De cuántas formas puede hacerse la distribución?

ii) Si de los 10 cursos, 2 son nocturnos y 4 de los 10 docentes no pueden concurrir a la noche, ¿cuántas distribuciones distintas pueden hacerse?

Ejercicio 15. Un electricista debe conectar 8 cables diferentes, cada uno a un tornillo de un aparato. Los cables están coloreados y los tornillos a los que se han de conectar están identificados con números. El electricista olvidó la tabla que indica cómo efectuar las 8 conexiones, con el inconveniente adicional que el aparato sólo funcionará si se efectúan todas las conexiones de la manera correcta y, en caso contrario, no dará ninguna señal que permita establecer si al menos alguna conexión está bien hecha. Cada intento le demanda 1 minuto de trabajo. ¿Le conviene intentar sistemáticamente o viajar durante 3 horas para ir a buscar la tabla y volver?

Ejercicio 16. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra NEUQUEN?

Ejercicio 17.

i) ¿Cuántos números distintos pueden formarse permutando los dígitos de 11122333345?

ii) ¿Cuántos números distintos pueden formarse permutando los dígitos de 11223334500?

iii) ¿Cuántos números distintos pueden formarse permutando los dígitos de 111222000?

Ejercicio 18. ¿Cuántas palabras de cuatro letras tomadas de la palabra TOPOLOGIA pueden formarse con la condición de que contengan **al menos** una vocal?

Ejercicio 19. ¿En cuántas formas pueden permutarse las letras de la palabra BONETERO manteniendo las consonantes en su orden relativo original?

Ejercicio 20. En una jaula hay un león, un tigre, un jabalí, una hiena y un zorro. Al abrirse la puerta los animales salen de a uno.

i) ¿De cuántas maneras pueden salir si el león debe salir antes que el zorro?

ii) ¿De cuántas maneras si el león debe salir antes que el tigre y el tigre antes que el zorro?

Ejercicio 21. ¿De cuántas maneras pueden elegirse 4 docentes para un curso de Algebra si hay 12 docentes disponibles?

Ejercicio 22. Se consideran 10 puntos en el plano no alineados de a tres. ¿Cuántos triángulos con vértices en esos puntos quedan determinados? Generalizar el resultado a n puntos.

Ejercicio 23.

i) Dadas dos rectas paralelas del plano, n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos quedan determinados con vértices en esos puntos?

ii) Dado un cuadrado en el plano y 10 puntos distintos y diferentes de los vértices en cada lado del cuadrado, calcular cuántos trángulos con vértices en esos 40 puntos quedan determinados.

iii) Sobre tres rectas paralelas (y distintas) del plano se marcan respectivamente m, n y r puntos. Suponiendo que al tomar un punto de cada recta nunca resulten alineados, ¿cuántos triángulos con vértices en esos puntos quedan determinados?

Ejercicio 24. Dadas n rectas paralelas y m rectas paralelas de distinta dirección, calcular el número total de paralelogramos que determinan por intersección.

Ejercicio 25. Cuatro personas juegan con un mazo de 40 cartas. ¿Cuál es el número total de manos que se pueden dar, si cada jugador recibe 10 cartas?

Ejercicio 26. En una oficina hay 15 empleados y deben distribuirse por igual en tres turnos. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Ejercicio 27. Entre 10 ingenieros y 8 abogados debe elegirse una comisión de cinco miembros integrada por más ingenieros que abogados. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse?

Ejercicio 28. ¿En cuántas formas pueden ubicarse 5 personas en los 20 asientos numerados de un colectivo?

Ejercicio 29. Se desea distribuir 15 bolillas indistinguibles en 7 casilleros.

i) ¿Cuántos resultados posibles hay?

ii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que el casillero 1 esté vacío?

iii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que algún casillero esté vacío?

iv) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que el casillero 2 tenga exactamente 4 bolillas?

v) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que ningún casillero quede vacío?

vi) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que exactamente un casillero esté vacío?

vii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que el casillero 1 esté vacío y el casillero 2 tenga exactamente 4 bolillas?

viii) ¿Cuántos resultados posibles hay en los que los tres últimos casilleros contengan un total de 7 bolillas?

Ejercicio 30.

i) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas en 10 jaulones distintos?

ii) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 11 canarios en 10 jaulones distintos?

iii) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas y 11 canarios en 10 jaulones distintos?

iv) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas y 11 canarios en 10 jaulones distintos con la condición de que no haya más de una paloma por jaulón?

v) ¿De cuántas formas se pueden distribuir 8 palomas y 11 canarios en 12 jaulones distintos de forma tal que haya a lo sumo una paloma y un canario por jaulón?

Ejercicio 31. Se extraen 10 bolillas de una caja que contiene 10 bolillas rojas, 10 verdes, 10 blancas y 10 azules. ¿Cuántos resultados posibles hay?

Ejercicio 32.

i) ¿En cuántas formas es posible descomponer el número natural n como suma de k sumandos enteros mayores o iguales que 0? Por ejemplo, si $k = 2$ y $n = 4$ se tienen las descomposiciones

$$0 + 4 = 4 + 0 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2$$

ii) ¿En cuántas formas es posible descomponer el número natural n como suma de k números naturales? Escribir las 20 particiones de 7 en la suma de 4 números naturales.

Ejercicio 33. Una persona va a apostar 10 pesos en una carrera en la que intervienen 5 caballos. ¿De cuántas formas distintas podrá hacerlo si cada boleto vale 2 pesos?

Ejercicio 34. En la puerta de un banco hay 15 jubilados esperando para cobrar sus respectivas pensiones. Si hay 4 cajas que efectúan el pago:

i) ¿De cuántas formas pueden distribuirse en las cajas para cobrar?

ii) ¿De cuántas formas pueden distribuirse sin dejar ninguna caja vacía?

iii) ¿De cuántas formas pueden hacerlo si en la caja 1 no se admiten más de 3 personas?

Ejercicio 35. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 6 chicas y 10 muchachos en una fila si se quiere que nunca haya dos chicas juntas?

Ejercicio 36. Dado el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

i) ¿De cuántas formas pueden extraerse tres números de tal modo que su producto sea múltiplo de:

a) 8?

b) 7?

c) 14?

d) 11?

ii) ¿De cuantas formas se pueden extraer tres números de tal modo que su suma sea impar?

Ejercicio 37. Decidir cuántos números de 6 dígitos múltiplos de 4 pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 6 y 8 si

i) los dígitos no se pueden repetir.

ii) los dígitos se pueden repetir.

Ejercicio 38. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 de manera que el 2 aparezca una cantidad impar de veces?

Ejercicio 39. ¿Cúantos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 6 y 7 con la condición de que la suma de sus cifras sea par?

Ejercicio 40. Si A tiene n elementos y B tiene m, ¿cuántas relaciones existen en $A \times B$?

Ejercicio 41. Sea X un conjunto de n elementos

i) ¿Cuántas relaciones pueden definirse en X?

ii) ¿Cuántas relaciones reflexivas?

iii) ¿Cuántas relaciones simétricas?

iv) ¿Cuántas relaciones reflexivas y simétricas al mismo tiempo?

v) ¿Cuántas relaciones antisimétricas?

vi) ¿Cuántas relaciones reflexivas y antisimétricas al mismo tiempo?

Ejercicio 42. ¿De cuántas maneras se puede partir en dos subconjuntos no vacíos un conjunto de n elementos? ¿Y en tres?

2. Cálculo elemental de probabilidades

Ejercicio 43. Se elige al azar un número de 6 cifras. Calcular la probabilidad de que todas las cifras sean diferentes.

Ejercicio 44. ¿Cuál es la probabilidad de sacar boleto capicúa?

Ejercicio 45. Se eligen al azar n elementos de un conjunto que tiene m elementos ¿Cuál es la probabilidad de que los n elementos elegidos sean diferentes entre sí?

Ejercicio 46. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número al azar entre 1 y 50 éste resulte primo?

Ejercicio 47. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un número entero de dos cifras resulte ser un cuadrado?

Ejercicio 48. Calcular la probabilidad de que al extraer una carta de un mazo de 40 cartas españolas:

i) resulte ser un as.

ii) resulte ser de copas.

iii) salga el as de copas.

iv) salga una figura.

Ejercicio 49. Calcular la probabilidad de que al extraer dos cartas de un mazo de 40 cartas españolas:

i) las dos sean pares.

ii) una sea par y otra impar.

iii) ambas tengan la misma paridad.

iv) al menos una de ellas sea un 2.

v) exactamente una de ellas sea de oro.

vi) salga el 2 de oro.

vii) las dos tengan el mismo número.

Ejercicio 50. Calcular la probabilidad de que al tirar tres veces una moneda:

i) las dos primeras sean caras.

ii) las dos primeras sean iguales.

iii) salgan más cecas que caras.

Ejercicio 51. Calcular la probabilidad de que, de 10 personas alineadas al azar, dos determinadas queden juntas.

Ejercicio 52. Se deben entregar doce cartas distintas a doce destinatarios distintos. Si las cartas se entregan al azar, calcular la probabilidad de que todas las cartas sean entregadas a sus verdaderos destinatarios.

Ejercicio 53.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que 12 personas determinadas tengan sus fechas de nacimiento en 12 meses diferentes?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 personas determinadas tengan sus fechas de nacimiento en junio?

iii) ¿Cuál es la probabilidad de que 6 personas dadas tengan sus fechas de nacimiento en 3 meses diferentes pero de a 2 coincidentes? (Por ejemplo, 2 nacieron en junio, 2 en febrero y 2 en abril.)

3. Lectura sobre probabilidades

Lo que sigue fue extraído de [Luis A. Santaló, *Probabilidad e Inferencia Estadística*, Capítulo 1 “La definición clásica.” Serie de matemática, monografía no. 11, O.E.A].

La definición clásica de probabilidad es la que figura por ejemplo en la famosa “Teoría Analítica de las Probabilidades” (Libro II, cap. 1) de P. S. Laplace, obra históricamente fundamental, publicada en 1812. Es la siguiente:

Definición. *Probabilidad* *de un suceso es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que nada obligue a creer que alguno de estos casos debe tener lugar de preferencia a los demás, lo que hace que todos sean, para nosotros, igualmente posibles.*

Por ejemplo, supuesto un dado ordinario, o sea, un cubo con las caras numeradas del uno al seis, al ser lanzado de manera arbitraria sobre un plano, la probabilidad de que salga el número 2 *será* $1/6$. *En efecto, si el dado está bien construído y el lanzamiento se hace completamente al azar, no hay nada que obligue a creer que una de las caras tenga que salir de preferencia a las demás; las seis caras son, por tanto, igualmente posibles. Existiendo un solo caso favorable y seis casos posibles, la probabilidad será* $1/6$, *como ya dijimos.*

[...] *Como segundo ejemplo, supongamos un bolillero o urna con* 20 *bolillas blancas y* 8 *rojas. Sacando una bolilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que resulte roja? Hay* 28 *casos posibles, de los cuales sólo* 8 *son favorables; luego, la probabilidad será* $8/28 = 2/7$. *Este resultado supone que todas las bolillas son igualmente posibles; si hubiera algunas con más probabilidad de salir que otras (por ejemplo, si las hubiera de diferentes tamaños), la probabilidad sería distinta.*

El inconveniente de la definición anterior radica precisamente en la necesidad de fijar la atención en que todos los casos sean "igualmente posibles." [...]

Muchas veces, aun cuando los casos no sean igualmente posibles, se puede aplicar la defínción anterior, con tal de tener cuidado de contar cada caso tantas veces como posibilidades hay de que se verifique. Consideremos, siguiendo a Laplace, el ejemplo siguiente:

"Se lanza al aire por dos veces consecutivas una moneda cuyos lados opuestos llamaremos cara *y* cruz*. Se pide la probabilidad de obtener cara por lo menos una vez." A primera vista podría creerse que los caso posibles son: las dos veces cara, una vez cara y otra cruz, y las dos veces cruz. Contando de esta manera nos encontraríamos con dos casos favorables y tres casos posibles; por tanto la probabilidad sería* $2/3$.

Sin embargo, un poco de atención pone de manifiesto que el caso en que sale una vez cara y otra vez cruz es más frecuente que los otros dos; en efecto, puede ocurrir que salga la primera vez cara y la segunda cruz o viceversa. El segundo caso tiene, pues, dos posibilidades y hay que contarlo dos veces, como si se tratara de dos casos diferentes. Representada la cara por C *y la cruz por* F*, los verdaderos casos posibles son* (C, C), (C, F), (F, C), (F, F)*, y por lo tanto hay tres casos favorables y cuatro posibles, de manera que la solución del problema es* $3/4$.

[...] *Mediante la defínción de Laplace* [...] *se pueden resolver muchos problemas. En realidad son problemas de análisis combinatorio, en los cuales la idea de probabilidad únicamente sirve para darles un enunciado atractivo, pero cuya mayor o menor dificultad sólo estriba en los razonamientos y fórmulas de tipo combinatorio que es necesario emplear.*

4. Aplicación de las probabilidades al análisis de algoritmos

En la práctica anterior vimos algunas nociones básicas de complejidad de algoritmos: el caso más favorable, el caso más desfavorable y el caso promedio. Si bien ha de esperarse que tras una gran cantidad de ejecuciones de un algoritmo, el tiempo empleado haya sido cercano al correspondiente a la complejidad del caso promedio multiplicada por la cantidad de veces que el algoritmo se aplicó, mucho mejor sería saber con qué probabilidad la ejecución del algoritmo va a demandar una cantidad dada de operaciones.

Para ilustrar la discusión, consideremos nuevamente el algoritmo de burbujeo. En el caso $n = 3$, tenemos la siguiente tabla

A	$T(A)$
1 2 3	0
1 3 2	1
2 1 3	1
2 3 1	2
3 1 2	2
3 2 1	3

donde a la izquierda pusimos la disposición inicial de la lista de tres elementos a ordenar y a la derecha la cantidad de intercambios que realizó el algoritmo. Los valores de A recorren las $3! = 6$ permutaciones posibles de tres elementos. Hay dos cosas interesantes que pueden verse con ayuda de esta tabla:

1. La probabilidad de que el algoritmo tenga que hacer 0, 1, 2 o 3 intercambios.
2. El promedio de intercambios.

Si llamamos $p_{3,k}$ a la probabilidad de que se produzcan exactamente k intercambios, obtenemos valores diferentes de cero para $k = 0, 1, 2, 3$. Por ejemplo, para calcular $p_{3,0}$ observamos de la tabla que hay un sólo caso favorable (el primero) sobre 6 posibles. Así, $p_{3,0} = 1/6$. Del mismo modo, $p_{3,1} = 2/6$ ya que los casos favorables son el segundo y tercero. Procediendo de esta forma obtenemos

$$p_{3,0} = 1/6, \quad p_{3,1} = 1/3, \quad p_{3,2} = 1/3, \quad p_{3,3} = 1/6.$$

Esto significa que los casos más favorable y más desfavorable se producen con menor probabilidad que los intermedios.

Con respecto a la segunda cuestión, si llamamos $P(3)$ a la complejidad promedio para el caso de 3 elementos, obtenemos

$$P(3) = \sum_{A \in S_3} T(A)/3! = 9/6 = 1.5$$

donde la suma recorre todas las permutaciones A de los elementos 1, 2 y 3.

Podemos generalizar todo esto al caso en que tenemos un número n (arbitrario) de elementos a ordenar. Recordemos que los valores que $T(A)$ puede tomar están entre 0 (caso más favorable) y $n(n-1)/2$ (caso más desfavorable). Por definición tenemos

$$P(n) = \sum_{A \in S_n} T(A)/n!$$

y

$$p_{n,k} = \frac{|C_{n,k}|}{n!}$$

donde $C_{n,k} = \{A \in S_n \mid T(A) = k\}$ es el conjunto de todas las permutaciones que requieren exactamente k intercambios para completar su ordenación.

El promedio está relacionado con las probabilidades $p_{n,k}$ por la fórmula siguiente:

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n(n-1)/2} k \cdot p_{n,k} \qquad (*)$$

En la sumatoria de la derecha las probabilidades $p_{n,k}$ pueden interpretarse como *pesos* que afectan a la complejidad k de acuerdo a la frecuencia con que se produce en la práctica.

Ejercicio 1. Pruebe que, en efecto, el promedio $P(n)$ puede calcularse a partir de las probabilidades $p_{n,k}$ según lo establece la ecuación $(*)$. Sugerencia: para calcular la suma $\sum T(A)$ agrupe, para cada k, todas las sucesiones A pertenecientes a $C_{n,k}$.

Si bien en general es difícil calcular los $p_{n,k}$, una cosa que sí puede hacerse es calcular el promedio $P(n)$ aun sin conocer esos valores.

Complejidad promedio. Cada sucesión de entrada es una permutación de n elementos. Recordemos que la cantidad de permutaciones de n elementos es $n!$. Como ya señalamos, para obtener el promedio sumamos para cada permutación A de n elementos la cantidad de intercambios $T(A)$, y dividimos por la cantidad total de permutaciones:

$$P(n) = \sum T(A)/n!$$

Pensemos ahora en una permutación B de $n+1$ elementos y llamemos *max* el mayor de los elementos de B. Consideremos la posición en la que *max* aparece dentro de la sucesión. Si $b_k = max$, la sucesión de n elementos obtenida al sacar *max* de la sucesión original es la siguiente:

$$b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_{n+1}$$

Llamemos A a esta sucesión. Tenemos que A es una permutación de n elementos.

Ejercicio 2. Pruebe que $T(B) = T(A) + (n + 1 - k)$.

Llamemos S_n y S_{n+1} a los conjuntos de permutaciones de n y $n+1$ elementos y $S_{n+1,k}$ al conjunto de todas las permutaciones de $n+1$ elementos en las que *max* ocupa el $k$ésimo lugar.

Ejercicio 3. Use el ejercicio anterior para probar que $P(n+1) = P(n) + n/2$. Sugerencia: para calcular la suma $\sum T(B)$ que se extiende sobre todos los $B \in S_{n+1}$, agrupe, para cada k entre 1 y $n+1$, a todos las permutaciones B pertenecientes a $S_{n+1,k}$ y use el ejercicio anterior.

Ejercicio 4. Use la relación de recurrencia del ejercicio anterior para demostrar que $P(n) = n(n-1)/4$.