ALGEBRA I - Práctica N°6 - Primer cuatrimestre 2002

Polinomios

Ejercicio 1. Dados los polinomios $f = X^3 + 3X^2 - X + 2$ y $g = 2X^2 + 4X - 1$ en $\mathbb{Z}[X]$, calcular:

i) el coeficiente principal de $fg^5 - g^3$

ii) el coeficiente principal de $8f^2 - g^3$

iii) el coeficiente de X^3 en fg

iv) el coeficiente de X en f^{30}

Ejercicio 2. Probar que no existe $f \in \mathbb{R}[X]$ tal que $f^2 = -3X^{100} + 2X^{21} - 5X^3 + 2X + 4$

Ejercicio 3. Dados los polinomios $f = 3X^{50} - 3X^{25} + 2X^4 - 5X + 3$ y $g = X^2 - 2$ en $\mathbb{Z}[X]$, calcular el grado de

i) g^{25}

ii) $(g + 1)f^2$

iii) $f + g^{20}$

iv) $f - 3g^{25}$

v) $X^{30}f - g^{40}$

Ejercicio 4. Hallar todos los polinomios $f \in \mathbb{C}[X]$ que satisfagan cada una de las siguientes igualdades:

i) $f^2 + X = Xf + 1$

ii) $f + X = fX$

iii) $f + Xf = f^2$

iv) $f^3 + X + 2 = X^3 + X^2 - 2X + f$

Ejercicio 5.

i) Sean f y $g \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $f^2 + Xg^2 = 0 \Rightarrow f = g = 0$

ii) Sean f y $g \in \mathbb{R}[X]$. Probar que $f^2 + g^2 = 0 \Rightarrow f = g = 0$ ¿Vale esta implicación si f y $g \in \mathbb{C}[X]$?

Ejercicio 6. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en cada uno de los siguientes casos:

i) $f = 3X^5 + 3X + 2 \qquad g = 2X^2 + 1$

ii) $f = -5X^4 + 2iX^3 + X \qquad g = X^3 + x^2 + X$

iii) $f = 9X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 3i \qquad g = 3X^4 + 5X - 1$

iv) $f = 9X^5 - 3X^3 - 2X + 1 \qquad g = X - 3$

Ejercicio 7.

i) Determinar los $r \in \mathbb{Q}$ tales que $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$ sea divisible por $X^2 + rX + 1$

ii) Determinar los $b \in \mathbb{R}$ tales que el resto de la división de $X^5 + 2X^3 + bX + 1$ por $X^2 + 3$ sea $2X + 1$

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g:

i) $f = X^3 + 1, \quad g = X^2 - X - 2$

ii) $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1, \quad g = X^2 + X + 1$

iii) $f = X^6 + X^4 + 1, \quad g = X^3 + 1$

Ejercicio 9. Hallar todos los polinomios $f \in \mathbb{Z}[X]$ que satisfagan cada una de las siguientes condiciones:

i) f mónico de grado 3 y $f(1) = f(-1)$

ii) f mónico de grado 2 y $f(1) = 0$

iii) f de grado 2 y tiene a 3 y a -2 por raíces.

Ejercicio 10.

i) Sea f un polinomio en $\mathbb{Z}[X]$. Probar que

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$$

cualesquiera sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$.

ii) Probar que no existe ningún polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(-1) = 1$ y $f(2) = 3$.

Ejercicio 11.

i) Sean f y g en $\mathbb{C}[X]$ y $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1$ sabiendo que tiene alguna raíz en común con $X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X - 1$

Ejercicio 12.

i) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ tal que $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Calcular el resto de dividir a f por $X^3 - X$

ii) Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, calcular el resto de dividir a $X^n - 3X^{n-2} - 2X^{n-3} + X^2 - X - 1$ por $X^2 - X - 2$

Ejercicio 13. Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Probar en $K[X]$:

i) $X - \alpha \mid X^n - \alpha^n$

ii) Si $\alpha \neq 0$, $X + \alpha \mid X^n + \alpha^n \iff n$ impar

iii) Si $f \in K[X]$, $f(X) - f(\alpha)$ es divisible por $X - \alpha$.

iv) ¿Divide $X + \alpha$ a $X^n - \alpha^n$? ¿Y $X - \alpha$ a $X^n + \alpha^n$?

Ejercicio 14.

i) Hallar el resto de la división de $X^{60} - 1$ por $X^3 - 5$

ii) Hallar el resto de la división de $X^{100} - 1$ por $X^3 - 2$

Ejercicio 15. En $K[X]$ ($K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) se define la relación de congruencia de la siguiente forma:

$$f \equiv g \pmod{h} \iff h \mid f - g$$

i) Sean f, g, k, h polinomios y $n \in \mathbb{N}$, probar las siguientes propiedades:

   a) $f \equiv g \pmod{h} \Rightarrow f + k \equiv g + k \pmod{h}$

   b) $f \equiv g \pmod{h} \Rightarrow fk \equiv gk \pmod{h}$

   c) $f \equiv g \pmod{h} \Rightarrow f^n \equiv g^n \pmod{h}$

ii) Usar el ítem anterior para calcular el resto de la división de f por h en los siguientes casos:

   a) $f = X^{1000} - X^{50} + 10X^2 - 3, \quad h = X^6 + 1$

   b) $f = 2X^{53} - 3X^{21} + 7X^6 - 1, \quad h = X^5 + 1$

   c) $f = X^{1000} - X^{500} + 1, \quad h = X^{100} + X + 1$

Ejercicio 16. Calcular todas las raíces racionales de los siguientes polinomios:

i) $X^4 + X^3 - 8X^2 - 2X + 12$

ii) $18X^5 - 3X^4 + 51X^3 - 9X^2 - 9X$

iii) $X^4 - \frac{13}{6}X^3 - X^2 + \frac{13}{3}X - 2$

Ejercicio 17. Sean a, b y m tres números racionales, $m \neq 0$, $b > 0$ tal que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ y $f \in \mathbb{Q}[X]$.

i) Probar que $(X - (a + m\sqrt{b}))(X - (a - m\sqrt{b})) \in \mathbb{Q}[X]$

ii) Probar que $a + m\sqrt{b}$ es raíz de $f \iff a - m\sqrt{b}$ es raíz de f

Ejercicio 18.

i) Calcular todas las raíces de $X^4 - X^3 - 4X^2 + X + 1$ sabiendo que $1 + \sqrt{2}$ es raíz.

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que tenga a $-\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ como raíces.

iii) Un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ satisface $f(1) = 3$ y $f(\sqrt{2}) = 3$. Calcular el resto de dividir a f por $X^3 - X^2 - 2X + 2$.

Ejercicio 19. Dados $a_0, \dots, a_n$ $\;n + 1$ números complejos distintos y $b_0, \dots, b_n$ $\;n + 1$ números complejos arbitrarios, se busca un polinomio $f \in \mathbb{C}[X]$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$.

i) Probar que

$$f = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(\prod_{0 \leq j \leq n \ ; \ j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

verifica lo pedido.

ii) Probar que el polinomio f del ítem i) es el único polinomio en $\mathbb{C}[X]$ nulo o de grado menor o igual que n que verifica lo pedido.

Ejercicio 20.

i) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(-1) = 1$, $f(0) = -2$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = \frac{2}{3}$ y $f(2) = 0$

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(-1) = \frac{9}{2}$, $f(0) = -1$, $f(1) = \frac{3}{2}$, $f(2) = -3$ y $f(4) = 3$

Ejercicio 21. Sean a, b y c las raíces complejas de $f = X^3 + 2X^2 - X + 1$. Calcular:

i) $a + b + c$

ii) abc

iii) $a^2 + b^2 + c^2$

iv) $a^3 + b^3 + c^3$

v) $a^4 + b^4 + c^4$

vi) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Ejercicio 22. Hallar un polinomio en $\mathbb{Q}[X]$ cuyas raíces sean $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$ y $\frac{1}{c^2}$, siendo a, b y c las raíces complejas de $2X^3 - 4X^2 + X + 1$.

Ejercicio 23. Determinar la multiplicidad de r como raíz de f en cada uno de los siguientes casos:

i) $r = 1,\ f = (X^2 + 1)(X^2 - 1)(X - 1)^3$

ii) $r = 2,\ f = (X^2 - 4)(X^2 - 4X + 4)$

iii) $r = i,\ f = (X^4 + 1)(X^2 + 1)(X^3 + i)$

iv) $r = -1,\ f = X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2$

Ejercicio 24.

i) Determinar, para cada $n \in \mathbb{N}$, las raíces múltiples del polinomio

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

ii) Determinar, para cada $n \in \mathbb{N}$, las raíces múltiples del polinomio $g = X^n - nX + n - 1$ y calcular su multiplicidad.

Ejercicio 25. Dado el polinomio $f = X^5 - aX^4 - aX + 1$, determinar para qué valores de a, -1 es raíz de multiplicidad 2 de f.

Ejercicio 26. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ tal que 8 es raíz doble de f. Hallar el resto de la división de f por $(X - 8)^3$ sabiendo que $f''(8) = 6$

Ejercicio 27. Probar que $X^3 - X^2 - X + 1$ divide a $X^{2n+1} - X^{n+1} - X^n + 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 28. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$ raíz de f de multiplicidad m. Probar que el resto de dividir a f por $(x - a)^{m+1}$ tiene grado m.

Ejercicio 29.

i) Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C} - \{0\}$, el polinomio $X^n - z$ tiene todas sus raíces simples.

ii) Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ el polinomio $1 + X^3 + X^5 + \ldots + X^{2n+1}$ no tiene raíces reales múltiples.

iii) Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, el polinomio $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$ tiene todas su raíces simples.

Ejercicio 30. Sea $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ definida de la siguiente forma:

$$\begin{cases} f_1 = X^3 - 3X - 2 \\ f_{n+1} = 2{f_n}^2 + X^3 + 4X^2 + 5X + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, -1 es raíz doble de f_n

Ejercicio 31. Sabiendo que $1+i$ es raíz de $X^8-2X^7+X^6+2X^5-4X^3+2X^2+4X-4$, factorizarlo en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

Ejercicio 32. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $X^4-2X^3-3X^2-2X-4$ sabiendo que la suma de dos de sus raíces es cero.

Ejercicio 33. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $X^6-X^5-7X^4-7X^3-7X^2-8X-6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6

Ejercicio 34. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio X^3+3iX^2+4i sabiendo que tiene una raíz doble.

Ejercicio 35. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$2X^5+(-5+4i)X^4-10iX^3-(3+4i)X^2+2(-1+2i)X+2$$

sabiendo que tiene 3 raíces a, b y c tales que $a+b+c=\frac{5}{2}$, $a.b.c=-1$ y $ab+ac+bc=-1$

Ejercicio 36. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio X^4+5X-6 sabiendo que la parte real de una de sus raíces es $\frac{1}{2}$

Ejercicio 37. Sean a, b, c y d las raíces del polinomio $f=X^4+3X^2+6X+10$. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$ a f sabiendo que $a+b+c-d=2+2i$

Ejercicio 38. Sea $w \in G_5$, $w \neq 1$. Probar que si w es raíz del polinomio $2X^{n+2}+X^n-2X^2-1$, entonces $5 \mid n$

Ejercicio 39. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que el polinomio

$$f=X^4-(a+4)X^3+(4a+5)X^2-(5a+2)X+2a$$

tenga a a como raíz <u>doble</u>. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

(*) Ejercicio 40. Sean f y $g \in \mathbb{C}[X]$. Sabiendo que el resto de dividir a f por X^3+X^2+X+1 es $2X^2+1$, hallar el resto de dividir a f^n por X^3+X^2+X+1 para cada $n \in \mathbb{N}$.

Aplicación: Una introducción al Cálculo Finito

Al estudiar los polinomios algebraicamente vimos que la definición de derivada podía extenderse formalmente a cualquier cuerpo. Esto lo hicimos sin recurrir a la noción de límite, claro, pero igualmente obtuvimos las propiedades conocidas sobre derivadas de sumas y productos de polinomios.

Hay, sin embargo, otra manera de enfocar la cuestión y eso es lo que hace el "cálculo finito". La idea es reemplazar la definición básica del cálculo tradicional que introduce al operador D en términos de límites, por otra análoga y de aplicación más general. En lugar de poner

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

en el cálculo finito, se define el operador Δ como

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

En esta definición el límite cuando $h \to 0$ se reemplaza por la evaluación de h en 1, de ahí el nombre de cálculo *finito*.

En el caso de los polinomios al operador D lo definimos a partir de la igualdad

$$D(x^m) = mx^{m-1}.$$

Lamentablemente el operador Δ no tiene un comportamiento tan fácil de describir cuando se lo aplica a las potencias de x. Por ejemplo

$$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

La solución a esto se logra tomando otra noción de "potencias de x". Se define la *m-ésima potencia descendente* de x como

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\dots(x-m+1)}^{m \text{ factores}}$$

donde m es un entero no negativo. El exponente aparece subrayado para distinguir de las potencias corrientes x^m.

En el caso extremo, cuando $m = 0$, obtenemos $x^{\underline{0}} = 1$ ya que por definición, el producto de 0 factores (ningún factor) es igual a 1.

El hecho básico del operador Δ es el siguiente:

$$\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}} \tag{1}$$

cuando $m > 0$. La demostración de esta igualdad es simple

$$\begin{aligned}
\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\
&= (x+1)x \dots (x+1-m+1) - x(x-1)\dots(x-m+1) \\
&= (x+1-(x-m+1))(x \dots (x-m+2)) \\
&= mx \dots (x-(m-1)+1) \\
&= m\Delta(x^{\underline{m-1}}).
\end{aligned}$$

La analogía no termina aquí. Del mismo modo que en el cálculo infinito el operador D tiene un operador inverso $\int$, en el cálculo finito, el operador Δ tiene por inverso al operador de sumación $\sum$. La definición de este operador es la siguiente

$$\sum\nolimits_a^b f(x)\,\delta x = \sum_{a \le k < b} f(k). \tag{2}$$

Esta fórmula sirve también para establecer la notación que, como puede verse, remarca las analogías con el cálculo integral. Es importante advertir que la sumatoria de la derecha se extiende para los valores de k entre a y b, excluyendo a b.

La propiedad más importante del operador de sumación es

$$\sum\nolimits_a^b \Delta f(x)\,\delta x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

que es análoga al Teorema Fundamental del Cálculo (infinito).

Ejercicio 1. Demuestre la propiedad enunciada arriba y pruebe además

i) $\sum_a^b f(x)\,\delta x + \sum_b^c f(x)\,\delta x = \sum_a^c f(x)\,\delta x$

ii) $\sum_a^b (f+g)\,\delta x = \sum_a^b f\,\delta x + \sum_a^b g\,\delta x$

iii) $\sum_a^b \lambda f(x)\,\delta x = \lambda \sum_a^b f(x)\,\delta x$

Aplicaciones del cálculo finito

Combinando los dos resultados principales de la sección anterior, las ecuaciones (1) y (2), obtenemos la siguiente identidad

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \sum\nolimits_0^n x^{\underline{m}} = \sum\nolimits_0^n \Delta \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\,\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$$

para enteros no negativos m y n. En otras palabras, el cálculo finito nos permite expresar fácilmente sumatorias de potencias descendentes.

Por ejemplo, cuando $m = 1$ obtenemos

$$\sum_{0\le k<n} k = \frac{k^{\underline{2}}}{2} = n(n-1)/2.$$

Cuando $m = 2$, como $x^{\underline{2}} = x^2 - x$, resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k<n} k^2 &= \sum\nolimits_0^n x^2\,\delta x \\
&= \sum\nolimits_0^n (x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}})\,\delta x \\
&= \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} \\
&= \frac{1}{3} n(n-1)(n-2+\frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{3} n(n-\frac{1}{2})(n-1)
\end{aligned}$$

Para potencias mayores (valores de m mayores que 2), uno podría utilizar el mismo método. Como se ve, la clave de todo consiste en expresar cada monomio x^m en términos de potencias descendentes.

La solución a este problema no es difícil (al menos en teoría) aunque requiere algunos conocimientos de álgebra de matrices. Si expresamos una potencia descendente $x^{\underline{k}}$ como un polinomio en x, vemos que se trata de un polinomio mónico de grado k. Haciendo esto para $k = 0, 1, \ldots, m$, obtenemos $m + 1$ polinomios.

Si ponemos en una matriz los coeficientes de estos polinomios, un polinomio en cada columna, comenzando en la primera fila con los términos independientes de cada polinomio, obtenemos una matriz cuadrada de $(m+1)\times(m+1)$ con unos en la diagonal y ceros debajo de ella. Por ejemplo, para $m = 3$ calculamos

$$\begin{aligned}
x^{\underline{0}} &= 1 \\
x^{\underline{1}} &= x \\
x^{\underline{2}} &= x(x-1) = x^2 - x \\
x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x
\end{aligned}$$

y nos queda la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general, la matriz construida de este modo expresa a las potencias descendentes en función de las potencias corrientes. Pero una matriz así (triangular superior con unos en la diagonal) es siempre inversible, y su inversa expresa a las potencias corrientes en términos de las descendentes, resolviendo el problema que nos preocupaba.

Siguiendo con el ejemplo, la inversa de la matriz A se puede obtener fácilmente. Para hacer esto el método más eficiente es el de operaciones elementales de filas, en el que las mismas operaciones se efectúan sobre dos matrices que inicialmente son A y la identidad, y que se van transformando hasta que la primera de ellas se convierte en la identidad.

Ejercicio 2. Calcule la inversa de la matriz A del ejemplo y obtenga una fórmula cerrada para la suma

$$\sum_{k=0}^{n} k^3.$$