ALGEBRA I - Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$

i) $a.b \mid c \Longrightarrow a \mid c$ y $b \mid c$

ii) $4 \mid a^2 \Longrightarrow 2 \mid a$

iii) $2 \mid a.b \Longrightarrow 2 \mid a$ ó $2 \mid b$

iv) $9 \mid a.b \Longrightarrow 9 \mid a$ ó $9 \mid b$

v) $a \mid b + c \Longrightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$

vi) $a \mid c$ y $b \mid c \Longrightarrow a.b \mid c$

vii) $a \mid b \Longrightarrow a \leq b$

viii) $a \mid b + a^2 \Longrightarrow a \mid b$

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $3n - 1 \mid n + 7$

ii) $3n - 2 \mid 5n - 8$

iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$

iv) $n - 2 \mid n^3 - 8$

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $99 \mid 10^{2n} + 197$

ii) $9 \mid 7.5^{2n} + 2^{4n+1}$

iii) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

iv) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

4. i) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que si n es un número natural par entonces $a + b \mid a^n - b^n$

iii) Probar que si n es un número natural impar entonces $a + b \mid a^n + b^n$

5. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) El producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$

ii) $\binom{2n}{n}$ es divisible por 2

iii) $2^n.\prod_{i=1}^{n}(2i - 1)$ es divisible por $n!$

iv) $\binom{2n}{n}$ es divisible por $n + 1$

Sugerencia: probar que $(2n + 1)\binom{2n}{n} = (n + 1)\binom{2n + 1}{n}$

6. Hallar todos los primos positivos menores o iguales que 100

7. i) Probar que un número natural n es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo $p \leq \sqrt{n}$

ii) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001

8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) si $n \mid (n - 1)! + 1$ entonces n es primo

ii) si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo

iii) si $2^n + 1$ es primo entonces n es una potencia de 2

9. Probar que existen infinitos primos.

Sugerencia: probar que si existieran finitos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entonces $a = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1, 0 y -1 que no es divisible por ningún primo.

10. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

i) $a = 133, \quad b = -14$
ii) $a = 13, \quad b = 111$
iii) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0$
iv) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0$
v) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 \ (n \in \mathbb{N})$
vi) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 \ (n \in \mathbb{N})$

11. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

i) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18
ii) la división de a por 3
iii) la división de $4a + 1$ por 9
iv) la división de $a^2 + 7$ por 36
v) la división de $7a^2 + 12$ por 28
vi) la división de $1 - 3a$ por 27

12. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el resto de la división de $n^3 + 4n + 5$ por $n^2 + 1$ sea $n - 1$

13. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros. Probar que existen r, s tales que $\sum_{j=0}^{s} a_{r+j}$ es divisible por n

Sugerencia: Considere los n números a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, …, $a_1 + a_2 + \cdots a_n$ y pruebe que si ninguno de ellos es divisible por n entonces necesariamente dos de ellos tienen el mismo resto en la división por n.

14. a) Hallar el desarrollo en base 2 de

i) 1365 ii) 2800 iii) 3.2^{13} iv) $13.2^n + 5.2^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$

b) Hallar el desarrollo en base 7 de 8575

c) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800

d) Sea a un entero. Probar que si el desarrollo en base 10 de a termina en n ceros entonces el desarrollo en base 5 de a termina en por lo menos n ceros.

15. i) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 22 \ (14)$. Hallar el resto de dividir a a por 2, por 7 y por 14
ii) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 13 \ (5)$. Hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5
iii) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\sum_{i=1}^{n} (-1).i!$ por 36

16. i) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 \equiv 3 \ (11)$
ii) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3 \ (13)$
iii) Probar que $a^2 \equiv -1 \ (5) \iff a \equiv 2 \ (5)$ ó $a \equiv 3 \ (5)$
iv) Probar que $a^7 \equiv a \ (7), \ \forall a \in \mathbb{Z}$
v) Probar que $3 \mid a^2 + b^2 \iff 3 \mid a$ y $3 \mid b$
vi) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \iff 7 \mid a$ y $7 \mid b$
vii) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 \iff a \equiv 2b \ (5)$ ó $a \equiv 3b \ (5)$
viii) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \implies 5 \mid a$ ó $5 \mid b$

ix) Probar que cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ no es divisible por 8

17. Sea a un entero impar que no es divisible por 5

i) Probar que $a^4 \equiv 1$ (10)
ii) Probar que a y a^{45321} tienen el mismo resto en la división por 10

18. i) Probar que $2^{5n} \equiv 1$ (31) para todo $n \in \mathbb{N}$
ii) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31
iii) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39$ (31), hallar el resto de la división de k por 5
iv) Hallar el resto de la división de $43.2^{163} + 11.5^{221} + 61^{999}$ por 31

19. i) Sea a un entero impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$
ii) Hallar el resto de la división de 5^{2267} por 32

20. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Probar que

i) $3 \mid a$ ó $3 \mid b$
ii) $5 \mid a$ ó $5 \mid b$ ó $5 \mid c$
iii) $4 \mid a$ ó $4 \mid b$

21. Enunciar y demostrar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11

22. Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4
Sugerencia: probar primero que un número congruente a 3 módulo 4 distinto de 1, 0 y -1 necesariamente es divisible por un primo congruente a 3 módulo 4. Luego probar que si existieran finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, entonces $a = -1 + 4.\prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1, 0, -1 que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.

23. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b

i) $a = 2532$, $b = 63$
ii) $a = 5335$, $b = 110$
iii) $a = 131$, $b = 23$
iv) $a = n^2 + 1$, $b = n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

24. Sea $a \in \mathbb{Z}$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que $(a^n - 1 : a^m - 1) = a^{(n:m)} - 1$
Sugerencia: probar que si r es el resto de la división de n por m entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$

25. Determinar, cuando existan, todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

i) $5a + 8b = 3$	ii) $7a + 11b = 10$
iii) $24a + 14b = 7$	iv) $20a + 16b = 36$
v) $39a - 24b = 6$	vi) $1555a - 300b = 11$

26. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar con 135 pesos?

27. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia

i) $17X \equiv 3\ (11)$ ii) $56X \equiv 2\ (884)$
ii) $56X \equiv 28\ (35)$ iv) $33X \equiv 27\ (45)$

28. Hallar el resto de la división de un entero a por 18, sabiendo que el resto de la división de $7a$ por 18 es 5.

29. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(7a+1 : 5a+4) \neq 1$

30. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$

31. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que si a y b son coprimos entonces $(a : b.c) = (a : c)$
Sugerencia: probar que $(a : b.c)$ y b son coprimos.

32. Sean p y q primos positivos distintos y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $p.q \mid a^n$ entonces $p.q \mid a$

33. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que si $(a : b) = 1$ entonces $(a^2.b^3 : a+b) = 1$

34. a) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$. Probar que $(c.a : c.b) = c.(a : b)$
b) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que
i) Si $(a : b) = 1$ entonces $(a^n : b^n) = 1$
ii) Si $(a : b) = d$ entonces $(a^n : b^n) = d^n$
iii) Si $a^n \mid b^n$ entonces $a \mid b$

35. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que

i) si $(a : b) = 1$ entonces $(7a - 3b : 2a - b) = 1$
ii) si $(a : b) = 1$ entonces $(2a - 3b : 5a + 2b) = 1$ ó 19
iii) si $(a : b) = 2$ entonces $(5a - 3b : 4a + b) = 2$ ó 34
iv) si $(a : b) = 3$ entonces $(a.b^2 : 9a + 9b) = 27$

36. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que
i) $(2^n + 7^n : 2^n - 7^n) = 1$
ii) $(2^n + 5^{n+1} : 2^{n+1} + 5^n) = 1$, 3 ó 9
iii) $(3^n + 5^{n+1} : 3^{n+1} + 5^n) = 2$ ó 14