

## ALGEBRA I - Práctica 6

1. Hallar  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $|z|$ ,  $\operatorname{Re}(z^{-1})$ ,  $\operatorname{Im}(z^{-1})$ ,  $\operatorname{Re}(-i.z)$  y  $\operatorname{Im}(i.z)$  en cada uno de los siguientes casos

i)  $z = (2 + i)(1 + 3i)$

ii)  $z = 5i(1 + i)^4$

iii)  $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(\overline{1 - 3i})$

iv)  $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$

v)  $z = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{179}$

vi)  $(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-1}[1 + (2 - i)^2]$

2. Dados  $z = 1 + 3i$  y  $w = 4 + 2i$ , representar en el plano los siguientes números complejos

i)  $z$

ii)  $w$

iii)  $z + w$

iv)  $z - w$

v)  $-z$

vi)  $\bar{z}$

vii)  $2z$

viii)  $\frac{1}{2}w$

ix)  $|z|$

x)  $|w - z|$

3. Graficar en el plano complejo

i)  $\{z \in \mathbb{C} / 3\operatorname{Re}(z) - 1 = 2\operatorname{Im}(z)\}$

ii)  $\{z \in \mathbb{C} / -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

iii)  $\{z \in \mathbb{C} / 2 \leq |z - 1 + i| \leq 3\}$

iv)  $\{z \in \mathbb{C} / z.\operatorname{Im}(z).(1 - i) = |z|^2\}$

v)  $\{z \in \mathbb{C} / |z - 2| = |z - 1 - i|\}$

4. Probar que

i)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

ii)  $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

iii)  $\overline{\bar{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

iv)  $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

v)  $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

vi)  $z.\bar{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

vii)  $|z.w| = |z|.|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

viii)  $|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ix)  $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

x)  $||z| - |w|| \leq |z - w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

xi)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

xii)  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

5. Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen

i)  $z \neq 0$  y  $z = \bar{z}^{-1}$

ii)  $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

iii)  $z \neq 0$  y  $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

iv)  $|z|^2 = (z + \bar{z}).\operatorname{Im}(z)$

v)  $z^2 + |z^2| = i.\bar{z}$

vi)  $|z - \bar{z}| = \operatorname{Re}(z)$

vii)  $i(z^2 + 4) = z.\operatorname{Im}(z)$

viii)  $z^2 = 3 + 4i$

ix)  $z \neq 0$  y  $z - 1 = z^{-1}$

x)  $z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0$

6. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i)  $3 + \sqrt{3}i$

ii)  $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$

iii)  $(-1 - i)^{-1}$

iv)  $(-1 + \sqrt{3}i)^5$

v)  $-\cos \frac{8}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{8}{3}\pi$

vi)  $\cos \frac{4}{7}\pi + i \operatorname{sen} \frac{-4}{7}\pi$

vii)  $\cos \frac{11}{5}\pi - i \operatorname{sen} \frac{19}{5}\pi$

viii)  $\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi + i \cos \frac{3}{4}\pi$

ix)  $\cos \frac{55}{3}\pi - \operatorname{sen} \frac{56}{3}\pi$

## 7. Graficar en el plano complejo

- i)  $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$
- ii)  $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / \arg(-i \cdot z) > \frac{\pi}{4}\}$
- iii)  $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$

8. i) Calcular  $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17}$

ii) Calcular  $(-1 + \sqrt{3}i)^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ iii) Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$ 9. Calcular las raíces  $n$ -ésimas de  $z$  en los casos

i)  $n = 6, z = 8$

ii)  $n = 4, z = -3$

iii)  $n = 7, z = -1 + i$

iv)  $n = 11, z = \frac{2i}{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}$

10. Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que

i)  $z^4 = i\bar{z}^3$

ii)  $z^6 = (2 - 2i)^{10}$

iii)  $z^8 = \bar{z}^8$

iv)  $(z - 1)^4 = (\bar{z} + i)^4$

v)  $z^{12} + z^6 + 1 = 0$

vi)  $(z + 1)^4 = (z + i)^2$

11. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\}$ . Probar quei)  $G_n$  tiene  $n$  elementosii)  $z, w \in G_n \implies z \cdot w \in G_n$ iii)  $w \in G_n \implies w^{-1} \in G_n$ iv)  $w \in G_n \implies |w| = 1$ v)  $w \in G_n \implies \bar{w} \in G_n$ vi)  $-1 \in G_n \iff n$  es parvii) todo elemento de  $G_n$  es una potencia de  $\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ 12. Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Probar que

i)  $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$

ii)  $G_n \subseteq G_m \iff n \mid m$

**Definición:** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $w \in \mathbb{C}$ . Diremos que  $w$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad si  $w \in G_n$  y para todo  $z \in G_n$  existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $z = w^r$ .

13. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar quei) si  $w \in \mathbb{C}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad y  $k \in \mathbb{N}$  entonces  $w^k$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad si y sólo si  $(n : k) = 1$ ii)  $w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad si y sólo si  $(n : k) = 1$ 14. Determinar las raíces  $n$ -ésimas primitivas de la unidad para  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  y  $12$ .

15. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $w \in \mathbb{C}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad si y sólo si  $\bar{w}$  lo es.
16. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que
- $w \in \mathbb{C}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad si y sólo si  $w^n = 1$  y  $w^j \neq 1$  para todo  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $j < n$
  - si  $w \in \mathbb{C}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad entonces  $w^k = 1$  si y sólo si  $n \mid k$
17. Sea  $w$  una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $w^{5n} = w^3$
18. Sea  $n \in \mathbb{N}$ .
- Calcular  $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}$  para cada  $w \in G_n$ . Deducir que la suma de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad es cero.
  - Probar que el producto de todas las raíces  $n$ -ésimas de la unidad es  $(-1)^{n-1}$
19. Calcular la suma de las raíces  $n$ -ésimas primitivas de la unidad para  $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10$  y  $15$ .
20. i) Calcular  $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$  para cada  $w \in G_7$   
 ii) Calcular  $w^{73} + \bar{w}.w^9 + 8$  para cada  $w \in G_3$   
 iii) Calcular  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$  para cada  $w \in G_{10}$   
 iv) Calcular  $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$  para cada  $w \in G_5$
21. Probar que si  $w \in G_7$  entonces  $\operatorname{Re}((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)) = 0$
22. Sea  $w$  una raíz quinceava primitiva de la unidad.
- Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$
  - Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$
23. Sea  $w$  una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w, \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $z_n$  es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo  $n \in \mathbb{N}$