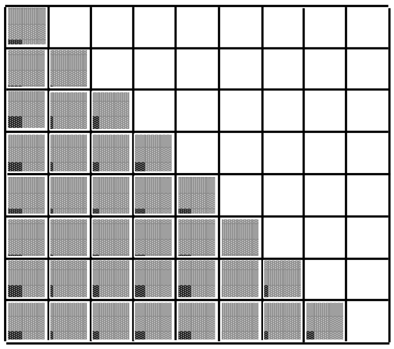
ALGEBRA I - Práctica 2

1. Determinar si $P(1)$ es verdadera y para cuáles $k \in \mathbb{N}$ vale que $P(k)$ implica $P(k+1)$ en cada uno de los siguientes casos

i) $P(n):\ n \geq n^2$	ii) $P(n):\ 2^n + 3^n \leq 5^n$	iii) $P(n):\ n \geq 13$
iv) $P(n):\ 2^n > n^2$	v) $P(n):\ n + 6 = n + 88$	vi) $P(n):\ 2^n \geq n^2 + 5$

2. a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

i) contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



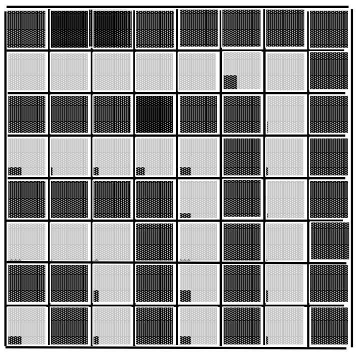
ii) usando que $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n = [1+n]+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\cdots$

iii) usando el principio de inducción

b) Deducir de a) que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

3. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 2.

iii) usando el principio de inducción

4. Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

i) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

ii) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

iii) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$

iv) $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$

5. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1)$

ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n}2(i-5)$ de las siguientes dos maneras:

a) usando las propiedades de la sumatoria

b) haciendo el cambio de índices $j = i - 5$ y usando luego la parte b) del ejercicio 2.

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$)

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\dfrac{1}{2i-1} - \dfrac{1}{2i+1}$)

6. Probar que las siguientes igualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}.i^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1}$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i+1).3^{i-1} = n.3^n$

v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

vi) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

7. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $n < 2^n$

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

iii) $3^n \geq n^3$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

v) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir que si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ entonces $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

9. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$. ¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

10. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

i) $n! \geq \frac{1}{2}.3^{n-1}$

ii) $\displaystyle\binom{2n}{n} \leq 4^n$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k} = n.2^{n-1}$

11. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$

ii) $3^n - 2^n > n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$

iv) $\displaystyle\binom{2n}{n} > n.2^n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$

12. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ valen

i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi.(n-2)$

13. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1}n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n}$.

14. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, hallar una fórmula para el término general y demostrar su validez

i) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 3^n \qquad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$

iv) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = n\,a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$

v) $a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$

15. a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

b) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

i) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + n^3 \qquad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}n^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Sugerencia: usar a) y el ejercicio 6.

c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^3$ y, usando esto, calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Sugerencia: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1)$

d) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + n.n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n!$ y, usando esto, calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i.i!$

16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \dfrac{1}{2n}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Probar que $a_n > \dfrac{1}{3^{n-1}}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

17. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión (de Fibonacci) definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$

18. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, conjeturar una fórmula para el término general y probar su validez

i) $a_1 = 1,\ a_2 = 2, \qquad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 1,\ a_2 = 4, \qquad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i.a_i \qquad (n \in \mathbb{N})$

iv) $a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$

19. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.