

ALGEBRA I - Práctica 5

1. a) Determinar cuántos divisores positivos tiene
 - i) 9000
 - ii) $15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5$
 - iii) $10^n \cdot 11^{n+1}$
 - iv) $10^n \cdot 8^{n+1}$b) Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4 \cdot 5^{123}$ y de $7^{435} \cdot 8^{23}$
2. Hallar el menor número natural n tal que $6552 \cdot n$ sea un cuadrado.
3. Decidir si existen enteros a y b no nulos que satisfagan
 - i) $a^2 = 8b^2$
 - ii) $a^2 = 3b^3$
 - iii) $7a^2 = 11b^2$
 - iv) $a^2 = 39b^2$
4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$
5.
 - i) Calcular la máxima potencia de 3 que divide a $77!$
 - ii) Calcular la máxima potencia de 9 que divide a $77!$
 - iii) Calcular la máxima potencia de 20 que divide a $81!$
 - iv) Calcular la máxima potencia de 24 que divide a $81!$
 - v) Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 6 de $31!$
6. Calcular $(18^n - 1 : 1292)$, para cada $n \in \mathbb{N}$
7. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 25) = 5$. Calcular $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$
8. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 2$. Calcular $(a^2 + b^2 : 84)$
9. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $((a^2 + 3)(7a - 2) : 15) = 5$
10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$
11. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 1260) = 70$ y n tiene 30 divisores positivos
12. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $[n : 130] = 260$
13. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 10$ y $[a : b] = 1500$
14. Hallar el resto de la división de a por p en los casos
 - i) $a = 33^{1427}$, $p = 5$
 - ii) $a = 71^{22283}$, $p = 11$
 - iii) $a = 5 \cdot 7^{2451} + 3 \cdot 65^{2345} - 23 \cdot 8^{138}$, $p = 13$
15. Hallar todos los primos positivos p tales que $p \mid 2^p + 5$
16.
 - i) Resolver la ecuación de congruencia $2^{13}X \equiv 5 \pmod{11}$
 - ii) Resolver la ecuación de congruencia $2^{94}X \equiv 7 \pmod{97}$
17. Sean p y q dos primos positivos distintos. Probar que si a es un entero coprimo con pq entonces $p \cdot q \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$
18. Probar que si a es un entero coprimo con 561 entonces $561 \mid a^{560} - 1$

19. Probar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$,

i) $728 \mid a^{27} - a^3$

ii) $880 \mid a^{64} - a^4$

iii) $\frac{2a^7}{35} + \frac{a}{7} - \frac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$

20. Hallar el resto de la división de 2^{2^n} por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$

21. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $7^n \equiv 5 \pmod{13}$

22. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{236} \equiv 6 \pmod{19}$

23. Probar que $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

24. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(3^{n+1} + 4^n : 4^{n+1} - 3^n) \neq 1$

25. Sea p un primo, $p > 2$ y sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid a$. Probar que $p^n \mid a^{(p-1)p^{n-1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comparar con el ejercicio 19. i) de la práctica 4.

Sugerencia: En el paso inductivo notar que $a^{(p-1)p^n} - 1 = (a^{(p-1)p^{n-1}})^p - 1^p$ y usar el ejercicio 8 de la práctica 2

26. i) Hallar el resto de la división de 3^{3603} por 5^3

ii) Hallar el resto de la división de 7^{542} por 81

27. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 0 & (8) \\ a \equiv 2 & (5) \\ a \equiv 1 & (21) \end{cases}$$

28. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 3 & (10) \\ a \equiv 2 & (7) \\ a \equiv 5 & (9) \end{cases}$$

29. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 & (6) \\ a \equiv 2 & (20) \\ a \equiv 3 & (9) \end{cases}$$

30. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 & (12) \\ a \equiv 7 & (10) \\ a \equiv 4 & (9) \end{cases}$$

y, en caso afirmativo, hallarlos todos.

31. Sabiendo que los restos de la división de un entero a por 3, 5 y 8 son 2, 3 y 5 respectivamente, hallar el resto de la división de a por 120.
32. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?
33. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?
34. Hallar el menor entero positivo a que satisfaga **simultáneamente** las dos condiciones siguientes:
 a) el resto de la división de a por 21 es 13.
 b) el resto de la división de $6a$ por 15 es 9.
35. Hallar un entero a entre 60 y 90 tal que el resto de la división de $2a$ por 3 sea 1 y el resto de la división de $7a$ por 10 sea 8.
36. Calcular el resto de la división de $\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$ por 56
37. i) Hallar el resto de la división de $3 \cdot 7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$ por 70
 ii) Hallar el resto de la división de 3^{385} por 400
 iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$
38. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \equiv 53 \pmod{77}$
39. i) Probar que $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$ ó 7. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales vale 7
 ii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$
 iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(11a^6 + 1 : 90) = 5$
 iv) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$. Hallar el resto de la división de a por 70
 v) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140a) = 14$
 vi) Hallar todos los enteros positivos a tales que $(4a^{62} - a : 11a) \neq a$
 vii) Para cada entero a hallar $(a^{18} + 413 : 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3)$
40. Hallar todos los divisores positivos de 25^{70} que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.
41. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(5^{n+1} - 9^n : 9^{n+1} + 39a5^n) = 22$. Hallar el resto de la división de a por 44.