1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (05/03/04)

1.–

(i) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Se define la siguiente relación $\Re$ en $\mathbb{N}$:

$$n \Re m \iff f(n) \mid f(m).$$

Probar que $\Re$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir es una relación de orden).

(ii) Para la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) := 6\,n + 10$, determinar todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que $1 \Re m$.

2.– Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ que verifican que $4^n \equiv n \pmod 5$.

3.– Sea ω una raíz cúbica primitiva de 1. Determinar, según los valores de $n \in \mathbb{N}$, los valores de

$$1 + \frac{\omega - 1}{3}\,\omega^n + \frac{\overline{\omega} - 1}{3}\,\overline{\omega}^n.$$

4.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale que:

$$X^4 - X^2 + 1 \mid X^{24n+4} + X^{12n+6} + X^{12n+10} + 1.$$

5.– Sea $f = X^4 + 2\,X^3 - X^2 + 2\,X + 1$.

(i) Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f, entonces $1/\alpha$ también.

(ii) Factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.