

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :

CARRERA :

**ALGEBRA – FINAL (15/04/04)**

1.– Sea  $\mathfrak{R}$  la relación en  $G_{32}$  definida por

$$z \mathfrak{R} \omega \iff z\bar{\omega} \in G_{24}.$$

- (i) Probar que  $\mathfrak{R}$  es una relación de equivalencia.
- (ii) Determinar la cantidad de elementos de  $G_{32}$  relacionados con  $i$ .

2.– Determinar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $a^{7^{100}} \equiv 3 \pmod{10}$ .

3.– Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión de enteros definida por:

$$a_0 = 5, a_1 = 3 \quad \text{y} \quad \forall n \geq 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2.$$

Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $(a_n : a_{n+1}) = 1$ .

4.– Probar que si  $w \in \mathbb{C}$  es una raíz quinta de la unidad,  $w \neq 1$ , entonces  $w + \bar{w}$  es raíz del polinomio  $X^3 - 2X + 1$ .

5.– Hallar todos los **enteros**  $a$  para los cuales el polinomio

$$X^6 + aX^5 + 2X^3 - 4aX + 1$$

tiene al menos una raíz racional, y para cada valor de  $a$  hallado factorizar el polinomio en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

**Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.**