1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

Turno: No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Final (16/7/04)

(**1**) Sean A, B, C suconjuntos finitos de un conjunto referencial V. Dar y demostrar una fórmula para el cardinal de $A \cap B \cap C$ en función de los cardinales de A, B y C y de sus uniones (es decir, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$).

(**2**) Determinar todos los $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente que

$$(x : y) = 8 \ \text{ y } \ 33\,x + 9\,y = 120.$$

(**3**) (a) Probar que $\frac{15^n+6}{7} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que $\frac{15^n+6}{7} \equiv r\ (44) \ \Leftrightarrow\ 15^n + 6 \equiv 7\,r\ (44)$ y $\frac{15^n+6}{7} \equiv r\ (14) \ \Leftrightarrow\ 15^n + 6 \equiv 7r\ (98)$.

(c) Calcular el resto de dividir por 44 a $\frac{15^{21}+6}{7}$.

(**4**) Sean $n \geq 3$ y $z \in G_{2^n}$ una raíz de orden 2^n de 1. Calcular los posibles valores de

$$(z^2 - 1) \sum_{i=0}^{2^{n-2}-1} z^{2i}$$

según si z es primitiva o no.

(**5**) Sean $a \neq b$ en $\mathbb{C}$. Probar que el único polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ de grado menor o igual que 2 que satisface que $f(a) = 1$, $f'(a) = 0$ y $f(b) = 0$ es el polinomio

$$f = \frac{(x-b)(2a-b-x)}{(a-b)^2},$$

y determinar todos los polinomios $g \in \mathbb{C}[x]$ de grado menor o igual que 3 que satisfacen que $g(0) = 1, g'(0) = 0, g(1) = 0$.

Justifique todas sus respuestas.