| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Apellido y Nombre:

Turno: No. de libreta: Carrera:

---

# ALGEBRA 1 – Final (03/08/04)

(1) Se define en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ la siguiente relación:

$$a \preccurlyeq b \iff \exists\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tal que } b = a + 4n.$$

Probar que $\preccurlyeq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir es una relación de orden) y determinar todos los $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $1 \preccurlyeq b$.

(2) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios definida por:

$f_1 := x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , $f_2 := x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$ y $f_n = (x-1)f_{n-1} - x\, f_{n-2}$, $\forall\, n \geq 3$.

Determinar la multiplicidad exacta de 1 como raíz de $f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Probar que si $n \equiv m \pmod{20}$ entonces $n^n \equiv m^m \pmod{5}$ y calcular el resto de dividir por 5 a $\sum_{n=1}^{100} n^n$.

(4) Sean $z$ una raíz primitiva de orden 16 de 1 y $w$ una raíz primitiva de orden 42 de 1. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen simultáneamente que $z^{7n} = z^{4n}$ y $w^{3n} = \overline{w}^{18}$.

(5) Para $g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$, se define $\overline{g} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i x^i$. Se puede probar que si $f \in \mathbb{R}[x]$ y $g \in \mathbb{C}[x]$, entonces $g \mid f \Leftrightarrow \overline{g} \mid f$.

Sabiendo eso, probar que si $f \in \mathbb{R}[x]$ es divisible por $x^3 - 2x + i$ en $\mathbb{C}[x]$, entonces es divisible por $(x^3 - 2x + i)\,(x^3 - 2x - i)$ en $\mathbb{R}[x]$, pero que si $f \in \mathbb{R}[x]$ es divisible por $x^3 + i\,x^2 + x + i$, eso no implica que sea divisible por $(x^3 + i\,x^2 + x + i)(x^3 - i\,x^2 + x - i)$.

**Justifique todas sus respuestas.**