1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Final (13/08/04)

(1) Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\Re$ la relación en X definida por:

$$(n_1, m_1) \ \Re \ (n_2, m_2) \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 \,|\, n_2 \quad \text{y} \quad m_2 \,|\, m_1.$$

- Probar que $\Re$ es una relación de orden (es decir es reflexiva, antisimétrica y transitiva).
- Calcular la cantidad de elementos $(n, m) \in X$ que satisfacen simultáneamente que

$$(\,2\,,\, 2^5 3^{18}\,) \ \Re \ (n, m) \quad \text{y} \quad (n, m) \ \Re \ (\,2^{10}\,,\, 6\,).$$

(2) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(42^{n+1} + 7n : 490) = 35$.

(3) Sea z una raíz **primitiva** de orden 16 de 1. Probar que $z^n = i$ implica que $4 \,|\, n$, y mostrar (con un contraejemplo) que la recíproca no es cierta: es decir mostrar que existe una raíz primitiva ω de orden 16 de 1 y un n divisible por 4 tales que $\omega^n \neq i$.

(4) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida recursivamente como

$$f_1 = x^2 - 3x + 2, \ \ f_2 = x^2 - 5x + 4 \ \text{y} \ f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Encontrar para cada $n \in \mathbb{N}$ quiénes son las raíces de f_n y probarlo.

(5) Hallar todos los polinomios de la forma

$$x^4 + i\,x^3 + 2\,x^2 + ai\,x + b,$$

con $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos y no nulos, que admiten al menos una raíz racional. Para todos los valores hallados, factorizar el polinomio obtenido.

Justifique todas sus respuestas.