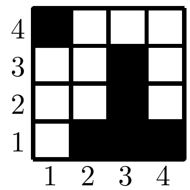
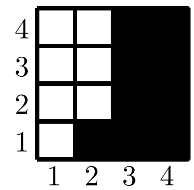
1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

Turno: No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Final (14/10/04)

(1) Se tiene un tablero de 4×4 casillas. Una *coloración* del tablero es una asignación de un color, blanco o negro, para cada casilla, como en el dibujo (los números indican las coordenadas de las casillas). Cada segundo, una computadora elige al azar las coordenadas (x, y) de una casilla, mira

$\alpha =$  $\beta =$ 

el color de ésta, y colorea de ese color a todas las casillas que están arriba y a la derecha de (x, y); es decir, a las casillas de coordenadas (a, b) tales que $a \geq x$ y $b \geq y$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las coloraciones del tablero ($\mathcal{C}$ tiene 2^{16} elementos). Se define en $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ la relación $\mathcal{R}$ por $\alpha \mathcal{R} \beta$ si de α se puede llegar a β en alguna cantidad de pasos. En el dibujo, $\alpha \mathcal{R} \beta$, ya que eligiendo $(1, 3)$ y luego $(3, 2)$, se pasa de α a β.

Probar que $\mathcal{R}$ no es una relación de orden ni de equivalencia.

(2) Se define la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y $a_{n+2} = a_n + 4\sqrt{a_{n+1}}$ si $n \geq 0$. Encontrar una fórmula cerrada para a_n y probarla.

(3) Encontrar todos los pares $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $(24^{10})^x \cdot (160^9)^y$ es divisible por 2^{360} y no por 2^{361}.

(4) Sea $z = \sqrt{3} + i$ y sea w una raíz primitiva de orden 35 de la unidad. Encontrar todos los $t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} 2\, z^{t^2} = 2^{t^2}\, z \\ w^{t^{12}} = \overline{w}^{2t-2} \end{cases}$$

(5) (a) Encontrar un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ de grado < 3 tal que

$$\begin{cases} r_{(x-1)(x-2)}(f) = 5x - 9, \\ r_{(x+1)}(f) = -8. \end{cases}$$

(b) Se tienen números distintos $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_m$, y dos polinomios $r_1, r_2 \in \mathbb{R}[x]$ tales que $\mathrm{gr}(r_1) < n$, $\mathrm{gr}(r_2) < m$. Se definen

$$p_1 = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n) \quad \text{y} \quad p_2 = (x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdots (x - b_m).$$

Probar que existe un único polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ de grado $< (n + m)$ tal que

$$\begin{cases} r_{p_1}(f) = r_1, \\ r_{p_2}(f) = r_2. \end{cases}$$

Justifique todas sus respuestas.