ALGEBRA I - Ejercicios adicionales

1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por

$$A \,\mathcal{R}\, B \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \in A \triangle B$$

Estudiar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

2. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 7^2$. Probar que $(a^2 b : 7^4(a^2 + b^2)) = 7^6$, 7^7 o 7^8.

3. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función que cumple que, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, n y $f(n)$ son coprimos. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$:

$$n \,\mathcal{R}\, m \quad \Longleftrightarrow \quad nf(m) \leq mf(n)$$

Probar que $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir, es una relación de orden).

4. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijado. Probar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, vale

$$\sum_{i=m^n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

5. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \leq 20\}$. Determinar cuántas relaciones $\mathcal{R}$ pueden definirse en A que satisfagan simultáneamente las tres condiciones siguientes:

1) $\mathcal{R}$ es reflexiva
2) $\mathcal{R}$ es simética
3) $\forall a, b \in A$ con a par, se tiene que $(a, b) \in \mathcal{R}$

6. Probar que, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, $(7.3^n - 5^{n+1} : 3^{n+1} + 7.5^n) = 2$ o 4.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinar cuántas relaciones de equivalencia $\mathcal{R}$ pueden definirse en A que satisfagan

$$\{(1,1), (1,3), (3,2), (4,5), (7,6), (8,10), (9,10)\} \subseteq \mathcal{R}$$

$$(1,7) \notin \mathcal{R}, \quad (1,8) \notin \mathcal{R} \quad \text{y} \quad (10,7) \notin \mathcal{R}$$

8. Se denota por P al conjunto de los números naturales pares. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$A \,\mathcal{R}\, B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \cap B) \cup (A' \cap B') \subseteq \mathrm{P}$$

a) Probar que el conjunto vacío está relacionado con $\mathbb{N}$ y con el conjunto de los números naturales impares.

b) Analizar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

9. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, vale

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i} \leq n! + 1$$

10. ¿Cuántas de las permutaciones de la palabra CONSTITUCION satisfacen que no aparecen dos O consecutivas?

11. Determinar todos los $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $34x + 22y = 14$ y $x \equiv y\ (25)$.

12. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, vale

$$(n-1)! \geq \frac{3^{n-1}}{n+2}$$

13. ¿Cuántas de las permutaciones de 7777533119 satisfacen que todos los unos están a la izquierda del 9 y todos los sietes a su derecha (como por ejemplo, 131937577)?

14. Sea b un número entero impar y sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 33a_n + b^{2n} + 15 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n \equiv 2 \quad (8)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Determinar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $2n^2 - 24$ por $n + 3$.

16. Probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(2.5^n - 2^{n+2} : 5^{n+1} + 7.2^n) = 1 \text{ o } 17$$

17. Se denota por P al conjunto de los números naturales pares. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$A\, \mathcal{R}\, B \iff A \cup \mathrm{P} \subseteq B \cup \mathrm{P}$$

Analizar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

18. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2 - i - 1}{i!} = 1 - \frac{n+1}{n!}$$

19. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 10 bolitas negras iguales y 14 bolitas rojas iguales en 6 cajas numeradas con la condición de que en la primera caja haya a lo sumo una bolita negra y en la tercera caja haya al menos 3 bolitas rojas?

20. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a-1}{a+2} + \dfrac{a+3}{4} \in Z$

21. Probar que $80 \mid 21^n + 60n + 79$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

22. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida por

$$f(a) = \begin{cases} a+3 & \text{si } a \text{ es par} \\ a-2 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

a) Determinar si f es inyectiva

b) Hallar la imagen de f y, para cada $b \in \mathrm{Im} f$ describir el conjunto $\{a \in \mathbb{Z} \,/\, f(a) = b\}$

23. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $17 \mid a$ y $(a : b) = 18$. Probar que $(2a + 3b : 5a - b) = 18$.

24. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $(a_n : a_{n+1}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

25. Sean A, b, C conjuntos. Probar que $C - (A \triangle B) = (C \cap A' \cap B') \cup (A \cap B \cap C)$

26. ¿Cuántas palabras de seis letras pueden formarse con las letras de APARTADOS con la condición de que tengan

i) exactamente tres vocales?

ii) por lo menos tres vocales?

27. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = (n-1)a_n + 2na_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

Probar que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

28. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{3a-7b}{5} + \dfrac{a+3b}{7} = 4$.

29. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 14, \quad a_2 = 36, \quad a_n = -4a_{n-2} + 4a_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

Probar que $a_n = (2n+5)2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

30. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $4a \equiv 5 \quad (7)$ y $3a + 35b = 23$.

31. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 140 y que el resto de dividir a $3b$ por 140 es 105, calcular $(a : b)$.

32. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $4 \mid a$, $8 \mid b$ y $33a + 9b = 120$.

33. ¿Cuántas palabras de seis letras pueden formarse con las letras de CHOCOLATE

i) que tengan exactamente una letra repetida?

ii) que tengan al menos una letra repetida?

34. Sean A, B, C conjuntos. Probar que $(A \cup B \cup C) - (B \triangle C) = (B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$

35. Probar que $(7^{40} - 5^{41} : 7^{41} + 5^{40}) = 4$.