ALGEBRA I - Ejercicios adicionales

1. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{783} \equiv 3\ (165)$ y $0 \leq a < 165$.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $((n^2-1)(n^2-4) : 35) = 1$ y $7 \not| n$. Probar que $n \equiv \pm 10\ (35)$.

3. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $(2+2i)z^3 - (\sqrt{3}-i)\overline{z^5}.|z| = 0$

4. Sea w una raíz doceava primitiva de la unidad. Probar que

$$\mathrm{Re}(w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5) = 0$$

5. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$\sqrt{5}X^3 + 10X^2 + 5X + 10\sqrt{5}$$

sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

6. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = X^8 - 3X^7 + 2X^6 + 2X^5 - 3X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 2X - 4$$

sabiendo que (al menos) una de las raíces octavas de la unidad es raíz de f.

7. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Hallar $r_{16}(a)$ sabiendo que $(7a+17 : 5a+3)$ tiene exactamente 4 divisores positivos.

8. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^{12} + 5|z|^{12} - 8 = 0$.

9. Probar que $X^3 - X^2 - X + 1 \mid X^{2n+1} - X^{n+1} - X^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Encontrar todos los primos positivos p tales que $3^{p^2+3} \equiv 16\ (p)$ y $(13p+11)^{131} \equiv 6\ (7)$.

11. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ hallar $(5a^{40} : 120)$

12. Graficar en el plano complejo

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, [\mathrm{Re}(iz)]^2 + [\mathrm{Re}(z)]^2 \geq 4 \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg(z^2) \leq \frac{3\pi}{2}$$

13. Sea $h = 2X^5 + iX - 3 \in \mathbb{C}[X]$.

i) Probar que h no tiene raíces reales

ii) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$. Probar que si $h \mid f$ entonces $2X^5 - iX - 3 \mid f$

14. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 105) = 1$ hallar $(a^{100} - 2^{42} : 105)$

15. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $(z^6 + 1 - i)(z^4 - 1) = 0$ y $0 \leq \arg(iz^2) < \pi$

16. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$X^6 + iX^5 - 2X^4 - 4iX^3 - 4X^2 + 4iX + 8$$

sabiendo que tiene una raíz real múltiple.

17. Para cada $z \in G_7$ calcular $z^{45} + z^{37} - 4z^{18} + \overline{z} + z^{-2} + 5\overline{z}^3 + z + 6$

18. Sean $f = X^4 + 3X^3 + X^2 - 2$ y $g = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$. Factorizar f y g en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tienen una raíz común.

19. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\left[n : 2^{10}.3^{30}.5^{30}\right] = 30^{30}$, $15^{15} \mid n$ y además n tiene exactamente 15500 divisores positivos.

20. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $31 \mid (8a^2 - 9^{151} : a^{153} - 1)$

21. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(-i)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$

22. Sea z una raíz séptima primitiva de la unidad. Probar que

$$\sum_{j=0}^{38} (z^j + \overline{z}^j) = 1$$

23. Sea p un primo. Determinar todas las raíces racionales de $X^{20} - (1 + p^3)X^{10} + p^3$

24. Determinar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ tales que $f^2 + 5X^2 f' = 2Xf$

25. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales 4 sea raíz doble de

$$X^3 - (k^2 + 2k + 4)X^2 + (2k^3 + 4k^2 + 8k)X - 8k^3$$

26. Hallar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ de grado menor o igual que 3 tales que el resto de dividir a f por $X^2 + X + 1$ es $-6X - 2$ y el resto de dividir a f por $(X + 1)^2$ es $-7X$.

27. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$ y $\overline{z} = z^3(z - i)^4$

28. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ las raíces de $X^3 - 3X^2 + 4X - 5$. Hallar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean ab, ac y bc.

29. Hallar todos los primos positivos p tales que $[p^2 - 35 : 7p^2 + 14p + 70] = 630$

30. Sean $z, w \in G_5$. Probar que $(w^{16} + z^{41})^5 \in \mathbb{R}$

31. Probar que $1365 \mid a.b.(a^{12} - b^{12})$

32. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $r_{35}(13a^{121} + 6b^{2413}) = 1$ y $r_{35}(5a^{19} - 7b^{29}) = 2$. Hallar $r_{35}(a)$ y $r_{35}(b)$.

33. Hallar $r_{33}(a)$ sabiendo que $\dfrac{5a^{41}}{11} + \dfrac{2a^{29}}{3} + \dfrac{2}{33} \in \mathbb{Z}$

34. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $1 + z^3 + z^6 + z^9 = 0$.

35. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $13a^{36} - 3b^{12} = c^{48}$. Probar que $35 \mid a.b.c$

36. i) Hallar un polinomio mónico $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 tal que el producto de las raíces de f sea 2, la suma de las raíces de f' sea $-\frac{2}{3}$ y $f(-1) = 1$.

ii) Factorizar el polinomio hallado en i) en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

37. Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ tal que -1 y 3 son raíces de f'. Probar que si $f(-1) \neq f(3)$ entonces el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 3)^2$ tiene grado 3.

38. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ las raíces de $X^3 - 3X^2 + 2X - 1$. Hallar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a - 1$, $b - 1$ y $c - 1$.

39. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$X^5 + 3\sqrt{2}X^4 + 8X^3 + 8\sqrt{2}X^2 + 12X + 4\sqrt{2}$$

sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura y una raíz múltiple.

40. Probar que $117 \mid 30^{49} + 48^{73}$.

41. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ tales que -1 es raíz múltiple de

$$f = X^n - 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 4X + 4$$

y, para cada valor hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.