1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :   CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (5/4/02)

1.– Sea a un entero *impar*. Probar que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que

$$2^{n+1} \mid a^{2^n} - 1.$$

2.– Sea $a \in \mathbb{N}$ fijado. Se define la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forma siguiente :

$$x_1 := 3\,a \quad , x_{n+1} := 3\,x_n - a.$$

Probar que $(x_1 : x_n) = a$ para todo $n \geq 2$.

3.– Calcular el resto de dividir por 11 el producto de todos los divisores positivos de $23 \cdot 5^{32}$.

4.– Probar que si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz *primitiva* de la unidad de orden 5, entonces $w + \overline{w}$ es raíz del polinomio $X^2 + X - 1$.

5.– Sea la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios definida por :

$$f_1 := X^3 + X^2 - X - 1 \quad , \quad f_{n+1} := f_n^2 + (X^4 + X^3)^{3^{n+1}} .$$

Determinar y probar una fórmula para la multiplicidad *exacta* de -1 como raíz de f_n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.