1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (8/3/02)

1.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, n y $f(n)$ son *coprimos*. Se define la siguiente relación $\Re$ en $\mathbb{N}$:

$$n \Re m \iff n\, f(m) \leq m\, f(n).$$

Probar que $\Re$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir es una relación de orden).

2.– Sea $m \in \mathbb{N}$ fijado. Probar por inducción que para todo $n \geq m$ vale

$$\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

3.– Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $5 \mid n\, 2^n - 3\, n^5$.

4.– Sea w una raíz quinceava *primitiva* de la unidad. Calcular

$$w^{159} + \overline{w}^{\,27} - w^{27} + w^6 + 2w^{-3}.$$

5.– Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales el polinomio

$$4X^{2n} - aX^n + 9$$

tiene una raíz múltiple en $\mathbb{C}$, y para cada valor de a hallado, determinar la multiplicidad de cada raíz del polinomio correspondiente.

Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.