1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (12/12/03)

1.– Sea $U = \{1, 2, 3, \dots, 998, 999, 1000\}$ y sea $\Re$ la relación en $\mathcal{P}(U) - \emptyset$ definida por

$$A \,\Re\, B \iff \min(A) = \min(B) \quad \text{y} \quad \max(A) = \max(B),$$

(donde si X es un subconjunto de U, $\min(X)$ denota el menor elemento de X y $\max(X)$ el mayor).
Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia y calcular el cardinal de la clase de $A := \{100, 201\}$.
Pregunta Bonus: ¿ Cuántas clases de equivalencia tiene la relación $\Re$?

2.– Hallar el menor número natural a que satisface

$$\begin{cases} 7^{15} a \equiv -5 \pmod{12} \\ (a : 425) = 5. \end{cases}$$

3.– Determinar y representar graficamente todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican simultáneamente:

$$\arg\left(z^3\,(1+i)\,\overline{z}\right) \le \frac{3}{4}\pi \quad \text{y} \quad 1 \le |\,z - i\,| \le 2.$$

4.– Sean $f \in \mathbb{C}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ raíz de f con multiplicidad 5. Se define la sucesión de polinomios $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$f_1 := f \quad \text{y} \quad f_{n+1} := (X - \alpha)^2 f_n + f^{n+1}\ ,\ \forall\, n \ge 1.$$

Encontrar y probar una fórmula para la multiplicidad de α como raíz de f_n.

5.– Calcular el número de factores irreducibles de $X^8 - X^4 - 1$ en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.