Algebra I
Examen Final (17-12-04)

Nombre y apellido:

Turno: **Carrera:**

1	2	3	4	5

1. Si $n \in \mathbb{N}$, probar que en el conjunto $\{n, n+1, \cdots, 2n\}$ hay un cuadrado perfecto.

2. Sean $A = \{1, 2, \cdots, 15\}$ y $B = \{1, 2, \cdots, 27\}$. Calcular el número de funciones estrictamente crecientes $f : A \to B$ tales que $f(2) > 5$.

   Aclaración: f se dice estrictamente creciente si $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$.

3. Demostrar que existen infinitos pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $x + y = 196$ y $(x : y) = 7$.

4. Sea ω una raíz octava primitiva de 1. Caracterizar los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$\prod_{i=0}^{n} \omega^{12i} = 1.$$

5. Si $g \in \mathbb{R}[X]$, determinar los posibles valores de $(g + X : Xg + 2)$. Para cada uno de los casos hallados, exhibir un polinomio g que lo satisfaga.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.