| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | |

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

---

**ALGEBRA – FINAL (19/03/04)**

**1.–** Sea $\Re$ la relación en $A := \{2, 3, 4, 5, \ldots, 999, 1000\}$ definida por

$$n \Re m \iff (n : m) \neq 1.$$

(i) Estudiar si $\Re$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

(ii) Determinar la cantidad de $m \in A$ que verifican que $12 \Re m$.

**2.–** Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $7a^9 \equiv 1 \pmod{10}$.

**3.–** Probar que

$$w = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\, i$$

es una raíz de orden $16$ de la unidad, que además es primitiva.

**4.–** Sea $g$ un polinomio que verifica que $g(0) \neq 0$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por:

$$f_1 := X^2\, g(X) \quad , \quad f_{n+1} = (X\, f_n'(X))^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Determinar y probar una fórmula para la multiplicidad exacta de $0$ como raíz de $f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**5.–** Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 4X + 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con el polinomio $X^6 + 3X^5 + 6X^4 + 7X^3 + 8X^2 + 6X + 4$.

**Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.**