

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | |

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :

CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (19/12/03)

- 1.– Sea $A := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea \mathcal{F} el conjunto de funciones f de A en A . Se define la siguiente relación \mathfrak{R} en \mathcal{F} :

$$f \mathfrak{R} g \iff f(2) \leq g(2).$$

- (i) Estudiar si \mathfrak{R} es reflexiva, simétrica, antisimétrica, y transitiva.
(ii) Sea $f : A \rightarrow A$ la función definida por $f(x) = r_8(7x)$ para $x \in A$. Calcular la cantidad de funciones $g : A \rightarrow A$ que verifican que $f \mathfrak{R} g$.

- 2.– Determinar todos los pares $a, b \in \mathbb{N}$ que verifican simultáneamente que

$$(a : b) = -2a + b \quad \text{y} \quad [a : b] = 83a.$$

- 3.– Sea w una raíz sexta primitiva de 1. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ que verifican que el producto

$$\prod_{i=0}^n w^{2i} = 1.$$

- 4.– Sea $f = X^2 + aX + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ las raíces de f . Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$.

- 5.– Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ el polinomio

$$X^6 + 4X^5 + 7X^4 - a^3X^3 + 7X^2 + a^2X + 1$$

admite al -1 como raíz múltiple. Para cada valor de a hallado, factorizar el polinomio correspondiente en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.