Nombre y Apellido:
Número de libreta:

Algebra I - 2005
Examen final - 26/7/05

(1) Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado $n \geq 2$. Probar que si f' divide a f entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $f(x) = \alpha(x-\beta)^n$.

(2) Sea $n \in \mathbb{N}$ un número impar.
   (a) Probar que si $\omega \in G_n$ es una raíz primitiva de orden n entonces $-\omega$ es una raíz primitiva de la unidad de orden $2n$.
   (b) Probar que todas las raíces primitivas de la unidad de orden $2n$ son de esta forma.

(3) Sea $A = \{a \in \mathbb{Z} \,/\, (a:11) = 1\}$ y sea $\simeq$ la relación en A definida por

$$a \simeq b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 b^8 \equiv 1 \ (11)$$

   (a) Probar que $\simeq$ es una relación de equivalencia.
   (b) Hallar todos los $a \in A$ tales que $a \simeq 6^{43}$.

(4) Sea $\{c_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión definida recursivamente como sigue:

$$c_0 = 1 \qquad\qquad c_n = 1 - \sum_{l=0}^{n-1} c_l \binom{n+1}{n-l}$$

   Probar que $\forall n \geq 0$, $c_n = (-1)^n$.

(5) ¿De cuántas maneras pueden colocarse 65 discos numerados en tres pilas si la última pila no puede quedar vacía, la segunda debe tener al menos 44 discos y la primera debe tener exactamente 15 discos?

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS