

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :

CARRERA :

**ALGEBRA – FINAL (27/12/02)**

1.– Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 6 \quad a_{n+1} = (4n + 6) a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n = \frac{(2n + 1)!}{n!}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$

2.– Sea  $T : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$  la función definida por  $T(f) = X^2 f - (X + 1)f'$ .  
Probar que  $T$  es inyectiva pero no suryectiva.

3.– Sea  $a$  un entero **impar**. Probar que  $(2^n + 7a : 2^{n+1} - 5a) = 1$  ó  $19$ .

4.– Sean  $f, g \in \mathbb{R}[X]$  tales que  $5$  es raíz doble de  $f + g$  y simple de  $f - g$ . Probar que  $5$  es raíz simple de  $f$  y de  $g$ .

5.– Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que

$$\left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)^{5n+1} = -1 \quad \text{y} \quad \left( \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} \right)^{2n-1} = 1$$

**Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.**