# Algebra I
# Examen Final (28-12-04)

**Nombre y apellido:**

**Turno:** **Carrera:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. Hallar (y probar) una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ definida por las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} a_5 = 22 \\ a_{n+1} = a_n + na_1 \quad \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

2. Probar que $9^n \geq 5^n + n4^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar que todo número natural $n$ se expresa unívocamente en la forma
$$n = a^2 b,$$
donde $a, b \in \mathbb{N}$ y $b$ es libre de cuadrados.

   Aclaración: Un entero se dice libre de cuadrados si 1 es el único cuadrado perfecto que lo divide.

4. Sea $w$ una raíz cúbica de $-1$, y sea $f = X^{121} - X^{108} - X^{74} + X^{25} - 1$. Si $w \neq -1$, probar que $f(w)$ es una raíz cúbica primitiva de 1.

5. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio de grado 3 con exactamente un coeficiente par. Probar que $f$ admite alguna raíz $u \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

**Nota**. Justifique debidamente todas sus respuestas.