1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (30/12/03)

1.– Sea $A := \{0,1,2,3,4,5\}$ y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones f de A en A. Se define la siguiente relación $\Re$ en $\mathcal{F}$:

$$f \,\Re\, g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \le g(x),\ \forall x \in A.$$

(i) Probar que $\Re$ es una relación de orden, es decir: es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

(ii) Sea $f : A \to A$ la función definida por $f(x) = r_6(5\,x)$ para $x \in A$. Calcular la cantidad de funciones $g : A \to A$ que verifican que $f \,\Re\, g$.

2.– Determinar la cantidad de múltiplos de 18 que hay en la progresión aritmética

$$2,\ 16,\ 30,\ 44, \dots,\ 6988.$$

3.– Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada de números complejos que verifica las siguientes relaciones:

$$z_1 = 1, \qquad z_{n+1}^n = z_n.$$

Probar por inducción que $z_n \in G_{(n-1)!}$ (es decir z_n es una raíz de la unidad de orden $(n-1)!$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.– Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = X^6 - 6\,X^5 + 14\,X^4 - 8\,X^3 - 14\,X^2 + 10\,X + 7$$

sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 1 y cuyo producto es -1, que además son múltiples.

5.– Determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 6$, el polinomio

$$X^n + 2\,X^5 + 3\,X^4 + 3\,X^3 + 3\,X^2 + 2\,X + 1$$

admite simultáneamente una raíz que es raíz cúbica de 1 y una raíz que es raíz quinta de 1.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.