Algebra I
Primer Examen Parcial (23-10-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Se define en $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la siguiente relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a - d = c - b.$$

   i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

   ii) Si $(x, y) \in A$, determinar el cardinal de la clase de equivalencia de (x, y).

2. Si $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)2^k = 2(2^n - 1) - n.$$

3. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 7 bolitas negras idénticas y 5 bolitas blancas numeradas de 1 a 5 en 6 cajas distintas, si deben ubicarse exactamente 2 bolitas en cada caja?

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a^2 + b^2 : 9072) = 504$ y $[5a + b : 336] = 1008$. Calcular $(a : b)$.

5. Hallar un número natural n, divisible por 17, tal que $n/2$ sea un cuadrado, $n/3$ sea un cubo, y $n/4$ sea una potencia quinta.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Primer Examen Parcial (23-10-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 2

1. Se define en $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la siguiente relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow c - a = b - d.$$

   i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

   ii) Si $(x, y) \in A$, determinar el cardinal de la clase de equivalencia de (x, y).

2. Si $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k 2^{n-k} = 2^{n+1} - n - 2.$$

3. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 6 bolitas negras idénticas y 4 bolitas blancas numeradas de 1 a 4 en 5 cajas distintas, si deben ubicarse exactamente 2 bolitas en cada caja?

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a^2 + b^2 : 14256) = 792$ y $[a + 7b : 528] = 1584$. Calcular $(a : b)$.

5. Hallar un número natural n, divisible por 19, tal que $n/2$ sea un cuadrado, $n/3$ sea un cubo, y $n/9$ sea una potencia quinta.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.