

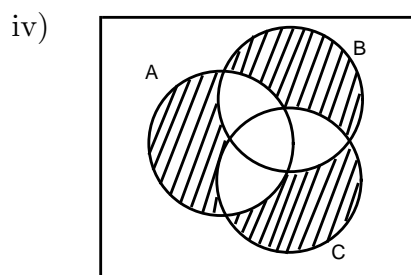
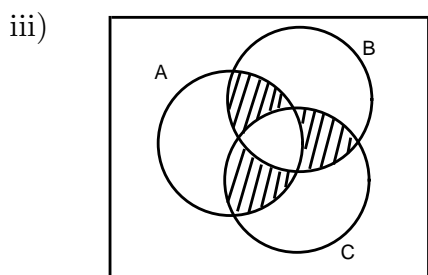
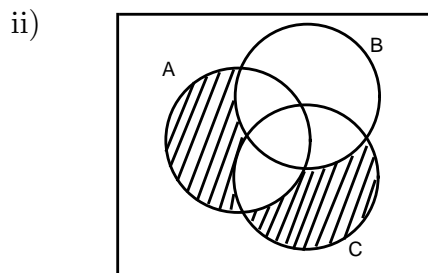
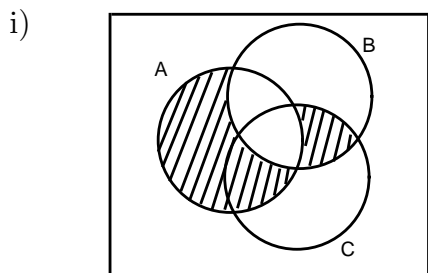
ALGEBRA I - Práctica 1

Primer Cuatrimestre - 2005

Si A es un subconjunto de un conjunto referencial V , denotaremos por A' al complemento de A respecto de V .

- Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}, -1\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas
 - $3 \in A$
 - $\{1, 2\} \subseteq A$
 - $\{1, 2\} \in A$
 - $\{3\} \subseteq A$
 - $\{\{3\}\} \subseteq A$
 - $\emptyset \in A$
 - $\{-1, 2\} \subseteq A$
 - $\emptyset \subseteq A$
 - $\{1, 2, -1\} \in A$
- Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos
 - $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$ $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
 - $A = \{1, 2, 0, -1, -2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / |x + 3| \leq 1\}$
 - $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - $A = \{\emptyset\}$ $B = \emptyset$
 - $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x| < 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 3\}$
- Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3 - 5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \Delta B$.
- Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es múltiplo de } 15\}$, hallar el complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V / n \geq 132\}$.
- Dado el conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$ y dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ hallar
 - $A \cap (B \Delta C)$
 - $(A \Delta B) - C$
 - $(A - B) \cap C$
 - $(A \cup B') \cap C$
 - $A' \cap B' \cap C'$
 - $(A - B') \Delta C$
- En un grupo de 110 alumnos hay 63 alumnos que estudian inglés, 30 que estudian alemán y 50 que estudian francés. Sabiendo que hay 7 alumnos que estudian los tres idiomas, 30 que sólo estudian inglés, 13 que sólo estudian alemán y 25 que sólo estudian francés, determinar
 - ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas?
 - ¿Cuántos alumnos estudian inglés y alemán pero no francés?
 - ¿Cuántos alumnos estudian alemán y francés pero no inglés?
 - ¿Cuántos alumnos estudian inglés y francés pero no alemán?
 - ¿Cuántos alumnos no estudian ningún idioma?
- Sean A , B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn
 - $A \cap (B \cup C)$
 - $A \cup (B \cap C)$
 - $A' \cup (B \cap C)$
 - $(A \cup B') \cap C$
 - $A \Delta (B \cup C)$
 - $(A \Delta B) \cap (C - A)$
 - $A - (B' \Delta C)$
 - $A \cup (B \Delta C)$
 - $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.



9. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los conjuntos A , B y C y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

ii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

iii) $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

v) $C \subseteq A \implies B \cap C \subseteq (A \Delta B)'$

vi) $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$

vii) $(A \Delta B) - C = (A - C) \Delta (B - C)$

xiii) $A \Delta \emptyset = A$

10. Sean A , B y C subconjuntos de un conjunto referencial V . Probar que

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

iii) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

iv) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

v) $A - (A \Delta B) = A \cap B$

vi) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

vii) $A \subseteq B \implies A \Delta B = B \cap A'$

viii) $A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$

ix) $C \subseteq A \implies (A \cup B) \cap C' = (B - C) \cup (A \Delta C)$

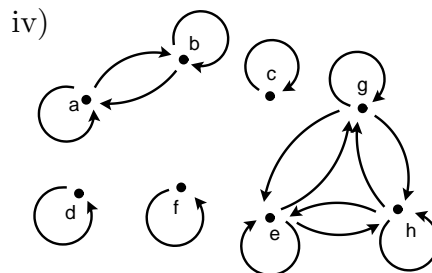
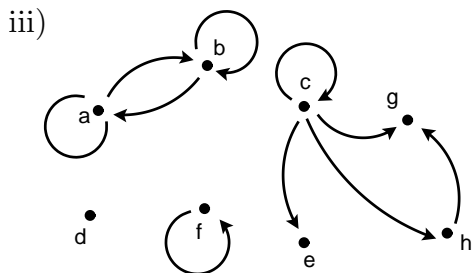
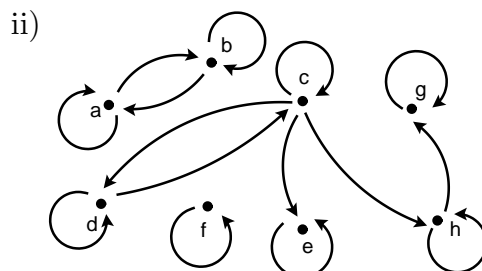
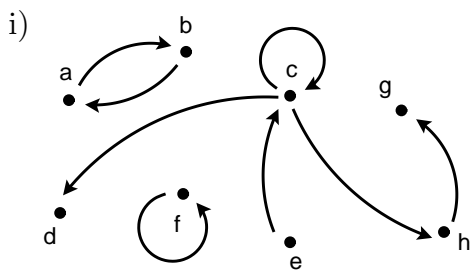
x) $A \cap C = \emptyset \implies A \cap (B \Delta C) = A \cap B$

11. a) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos
- i) $A = \emptyset$
 - ii) $A = \{1\}$
 - iii) $A = \{a, b\}$
 - iv) $A = \{1, a, \{-1\}\}$
 - v) $A = \{1, \{1, 2\}\}$
 - vi) $A = \{1, 3, 5, \emptyset\}$
- b) ¿Qué relación existe entre la cantidad de elementos de A y la de su conjunto de partes?
- c) Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.
12. a) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{a, b, c\}$. Hallar $A \times A$, $B \times C$, $(A \cap B) \times C$, $(A \cup B) \times C$ y $(A - B) \times B$
- b) Sean X e Y conjuntos. Si X tiene n elementos e Y tiene m elementos, ¿cuántos elementos tiene $X \times Y$?
- c) Sean A , B y C conjuntos. Probar que
- i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
 - ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
 - iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
 - iv) $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$
13. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuántas relaciones de A en B hay?
14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

dibujando 6 puntos en el plano que representen cada uno de los elementos de A y una flecha de a a b para cada $(a, b) \in \mathcal{R}$. Viendo el gráfico determinar si \mathcal{R} es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

15. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.



16. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación \mathcal{R} en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$

iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

iv) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a + b \text{ es par}\}$

v) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a + b \text{ es impar}\}$

vi) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / |a| \leq |b|\}$

vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, \mathcal{R} definida por $A \mathcal{R} B \iff 2 \notin A - B$

viii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, \mathcal{R} definida por $A \mathcal{R} B \iff A \cap \{1, 2, 3\} \subseteq B \cap \{1, 2, 3\}$

ix) $A = \mathbb{Z}$, \mathcal{R} definida por $a \mathcal{R} b \iff a + 3b$ es divisible por 4

x) $A = \mathbb{N}$, \mathcal{R} definida por $a \mathcal{R} b \iff b$ es múltiplo de a

17. Dar un ejemplo de una relación en \mathbb{R} que

i) sea simétrica y antisimétrica

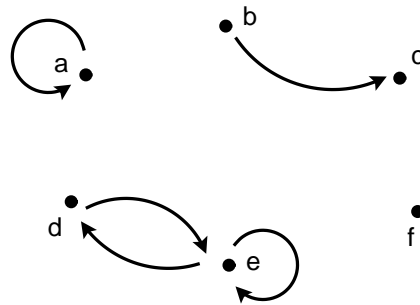
ii) no sea ni simétrica ni antisimétrica

iii) sea simétrica y transitiva pero no reflexiva

iv) sea reflexiva y simétrica pero no transitiva

v) sea de equivalencia y de orden

18. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea \mathcal{R} la relación en A representada por el gráfico



¿Cuál es la mínima cantidad de pares que se deben agregar a \mathcal{R} de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva

ii) simétrica

iii) transitiva

iv) reflexiva y simétrica

v) simétrica y transitiva

vi) reflexiva y transitiva

vii) de equivalencia

19. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ encuentre una relación de orden \mathcal{R} en A que tenga 12 elementos y que verifique $(a, b) \in \mathcal{R}$, $(e, a) \in \mathcal{R}$ y $(c, d) \notin \mathcal{R}$. ¿Es única?

20. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar

- i) la clase de b
 - ii) la clase de c
 - iii) la clase de d
 - iv) la partición asociada a \mathcal{R}
21. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$.
22. Hallar todas las particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A ?
23. a) Determinar si \mathcal{R} es una función de A en B en los casos
- i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$
 - ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
 - iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
 - iv) i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, e)\}$
 - v) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} / a = 2b - 3\}$
 - vi) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} / a = 2b - 3\}$
 - vii) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / a + b \text{ es divisible por } 5\}$
 - viii) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / b = a^2\}$
- b) Para cada una de las relaciones de A en B definidas en a) que sean funciones hallar la imagen y determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
24. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.
- i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^3 - 5$
 - ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^2 - 5$
 - iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$
 - iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (2x, x^2, x - 7)$
 - v) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 6 \\ x + 6 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$
 - vi) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
 - vii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
 - viii) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(a, b) = 3a - 2b$

$$\text{ix) } f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a) = \begin{cases} a + 1 & \text{si } a \text{ es par} \\ a - 1 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

25. a) Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ f(n) &= \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en otro caso} \end{cases} & g(n, m) &= n \cdot (m + 1) \end{aligned}$$

calcular $(f \circ g)((3, 4)$, $(f \circ g)((2, 5)$ y $(f \circ g)((3, 2)$.

b) Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases} & g(n) &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tal que

i) $(f \circ g)(n) = 13$

ii) $(f \circ g)(n) = 15$

26. Hallar $f \circ g$ en los casos

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 18$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x + 3$

ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 3$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x^2 - 18$

iii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n - 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) = 4n$

iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 5, 3x)$

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(n) = \sqrt{n}$

27. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\text{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad.

28. Sean A , B y C conjuntos. Probar que si $f : B \longrightarrow C$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva

iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva

v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva