

## ALGEBRA I - Práctica 2

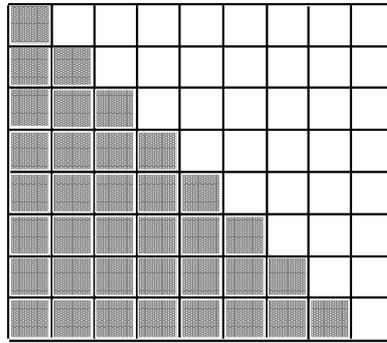
Primer Cuatrimestre - 2005

1. Determinar si  $P(1)$  es verdadera y para cuáles  $k \in \mathbb{N}$  vale que  $P(k)$  implica  $P(k + 1)$  en cada uno de los siguientes casos

- i)  $P(n) : n \geq n^2$       ii)  $P(n) : 2^n + 3^n \leq 5^n$       iii)  $P(n) : n \geq 13$   
 iv)  $P(n) : 2^n > n^2$       v)  $P(n) : n + 6 = n + 88$       vi)  $P(n) : 2^n \geq n^2 + 5$

2. a) Probar que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- i) contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama

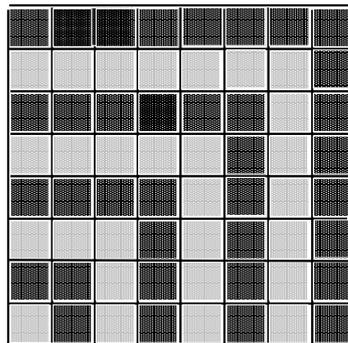


- ii) usando que  $1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = [1+n] + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \dots$   
 iii) usando el principio de inducción

- b) Deducir de a) que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

3. Probar que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

- i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



- ii) usando el ejercicio 2.  
 iii) usando el principio de inducción

4. Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

- i)  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

- ii)  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$   
 iii)  $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \dots + (-144)$   
 iv)  $1 + 9 + 25 + 49 + \dots + 441$

## 5. Calcular

- i)  $\sum_{i=1}^n (4i + 1)$   
 ii)  $\sum_{i=6}^n 2(i - 5)$  de las siguientes dos maneras:  
 a) usando las propiedades de la sumatoria  
 b) haciendo el cambio de índices  $j = i - 5$  y usando luego la parte b) del ejercicio 2.  
 iii)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$  (Sugerencia:  $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ )  
 iv)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$  (Sugerencia: calcular  $\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$ )

6. Probar que las siguientes igualdades son verdaderas para todo  $n \in \mathbb{N}$ 

- i)  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$   
 ii)  $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$   
 iii)  $\sum_{i=0}^n \frac{-1}{4i^2 - 1} = \frac{n+1}{2n+1}$   
 iv)  $\sum_{i=1}^n (2i+1) \cdot 3^{i-1} = n \cdot 3^n$   
 v)  $\sum_{i=1}^n \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$   
 vi)  $\prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

7. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo  $n \in \mathbb{N}$ 

- i)  $n < 2^n$   
 ii)  $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$   
 iii)  $3^n \geq n^3$   
 iv)  $\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

$$\text{v) } \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$$

$$\text{vi) } \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^i - 1} > \frac{n+3}{4}$$

8. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Probar que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{i-1} b^{n-i}$ . Deducir que si

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 1 \text{ entonces } \sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

9. Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq -1$ . Probar que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ . ¿En qué paso de la demostración se usa que  $a \geq -1$ ?

10. Probar que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , vale

$$\text{i) } n! \geq \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{ii) } \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

$$\text{iii) } \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{iv) } \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

11. Probar que

$$\text{i) } n! \geq 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

$$\text{ii) } 3^n - 2^n > n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

$$\text{iii) } \sum_{i=1}^n \frac{3^i}{i!} < 6n - 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

$$\text{iv) } \binom{2n}{n} > n \cdot 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

12. Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  valen

$$\text{i) la cantidad de diagonales de un polígono de } n \text{ lados es } \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\text{ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de } n \text{ lados es } \pi \cdot (n-2)$$

13. i) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n = 2^n + 3^n$ .

ii) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2n a_n + 2^{n+1} n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n = 2^n n!$ .

iii) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + n(3n + 1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n = n^2(n - 1)$ .

iv) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n - 2 \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n = \binom{2n}{n}$ .

14. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, hallar una fórmula para el término general y demostrar su validez

i)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

ii)  $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad (n \in \mathbb{N})$

iii)  $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

iv)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

v)  $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$

15. a) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales. Probar que  $\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

b) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

i)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n^3 \quad (n \in \mathbb{N})$

ii)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

iii)  $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + (2n + 1)3^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

Sugerencia: usar a) y el ejercicio 6.

c) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n = n^3$  y, usando esto, calcular  $\sum_{i=1}^n i^2$ .

Sugerencia:  $\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1)$

d) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n.n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n = n!$  y, usando esto, calcular  $\sum_{i=1}^n i.i!$

16. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que  $a_n \leq \frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

ii) Probar que  $a_n > \frac{1}{3^{n-1}} \binom{2n}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$

17. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión (de Fibonacci) definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

18. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, conjeturar una fórmula para el término general y probar su validez

i)  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_{n+2} = n a_{n+1} + 2(n+1)a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

ii)  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

iii)  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^n i.a_i \quad (n \in \mathbb{N})$

iv)  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) \quad (n \in \mathbb{N})$

19. i) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n < 1 + 3^{n-1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

ii) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2} a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $a_n > n + \frac{1}{3}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ .