

ALGEBRA I - Práctica 6

Primer Cuatrimestre - 2005

1. Hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-i.z)$ y $\operatorname{Im}(i.z)$ en cada uno de los siguientes casos

i) $z = (2 + i)(1 + 3i)$

ii) $z = 5i(1 + i)^4$

iii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(\overline{1 - 3i})$

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$

v) $z = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{179}$

vi) $(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-1}[1 + (2 - i)^2]$

2. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano los siguientes números complejos

i) z

ii) w

iii) $z + w$

iv) $z - w$

v) $-z$

vi) \bar{z}

vii) $2z$

viii) $\frac{1}{2}w$

ix) $|z|$

x) $|w - z|$

3. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} / 3\operatorname{Re}(z) - 1 = 2\operatorname{Im}(z)\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} / -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} / 2 \leq |z - 1 + i| \leq 3\}$

iv) $\{z \in \mathbb{C} / z.\operatorname{Im}(z).(1 - i) = |z|^2\}$

v) $\{z \in \mathbb{C} / |z - 2| = |z - 1 - i|\}$

4. Probar que

i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

ii) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

iii) $\bar{\bar{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

iv) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

v) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

vi) $z.\bar{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

vii) $|z.w| = |z|.|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

viii) $|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ix) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

x) $||z| - |w|| \leq |z - w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

xi) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

xii) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

i) $z \neq 0$ y $z = \bar{z}^{-1}$

ii) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

iv) $|z|^2 = (z + \bar{z}).\operatorname{Im}(z)$

v) $z^2 + |z^2| = i.\bar{z}$

vi) $|z - \bar{z}| = \operatorname{Re}(z)$

vii) $i(z^2 + 4) = z.\operatorname{Im}(z)$

viii) $z^2 = 3 + 4i$

ix) $z \neq 0$ y $z - 1 = z^{-1}$

x) $z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0$

6. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3 + \sqrt{3}i$

ii) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$

iii) $(-1 - i)^{-1}$

iv) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$

v) $-\cos \frac{8}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{8}{3}\pi$

vi) $\cos \frac{4}{7}\pi + i \operatorname{sen} \frac{-4}{7}\pi$

vii) $\cos \frac{11}{5}\pi - i \operatorname{sen} \frac{19}{5}\pi$

viii) $\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi + i \cos \frac{3}{4}\pi$

ix) $\cos \frac{55}{3}\pi - \operatorname{sen} \frac{56}{3}\pi$

7. Graficar en el plano complejo

- i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$
- ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / \arg(-i \cdot z) > \frac{\pi}{4}\}$
- iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$

8. i) Calcular $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17}$

ii) Calcular $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$ 9. Calcular las raíces n -ésimas de z en los casos

- i) $n = 6, z = 8$
- ii) $n = 4, z = -3$
- iii) $n = 7, z = -1 + i$
- iv) $n = 11, z = \frac{2i}{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}$

10. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

- i) $z^4 = i \bar{z}^3$
- ii) $z^6 = (2 - 2i)^{10}$
- iii) $z^8 = \bar{z}^8$
- iv) $(z - 1)^4 = (\bar{z} + i)^4$
- v) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$
- vi) $(z + 1)^4 = (z + i)^2$

11. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\}$. Probar que

- i) G_n tiene n elementos
- ii) $z, w \in G_n \implies z \cdot w \in G_n$
- iii) $w \in G_n \implies w^{-1} \in G_n$
- iv) $w \in G_n \implies |w| = 1$
- v) $w \in G_n \implies \bar{w} \in G_n$
- vi) $-1 \in G_n \iff n$ es par
- vii) todo elemento de G_n es una potencia de $\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$

12. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que

- i) $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
- ii) $G_n \subseteq G_m \iff n \mid m$

Definición: Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $w \in \mathbb{C}$. Diremos que w es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si $w \in G_n$ y para todo $z \in G_n$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $z = w^r$.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

- i) si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad y $k \in \mathbb{N}$ entonces w^k es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n : k) = 1$
- ii) $w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n : k) = 1$

14. Determinar las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 .

- 15.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y sólo si \bar{w} lo es.
- 16.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que
- $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y sólo si $w^n = 1$ y $w^j \neq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j < n$
 - si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad entonces $w^k = 1$ si y sólo si $n \mid k$
- 17.** Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$
- 18.** Sea $n \in \mathbb{N}$.
- Calcular $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}$ para cada $w \in G_n$. Deducir que la suma de las raíces n -ésimas de la unidad es cero.
 - Probar que el producto de todas las raíces n -ésimas de la unidad es $(-1)^{n-1}$
- 19.** Calcular la suma de las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10$ y 15 .
- 20.** i) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$
 ii) Calcular $w^{73} + \bar{w}.w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$
 iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$
 iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$
- 21.** Probar que si $w \in G_7$ entonces $\operatorname{Re}((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)) = 0$
- 22.** Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad.
- Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$
 - Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$
- 23.** Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w, \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$