

# ALGEBRA I - Práctica 7

Primer Cuatrimestre - 2005

1. Calcular el coeficiente de  $X^{20}$  de  $f$  en los casos
    - i)  $f = (X - 3)^{133}$
    - ii)  $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$
    - iii)  $f = (X^5 + 4)^7 - (X + 1)^{25} - 3$
    - iv)  $f = X^{18}(X^4 + 2X - 3)^{13} + 3(X^5 - 2)^7 - X^{19}(2X^6 + 7X^2 + 5X - 3)^{10}$
  2. Calcular el grado y el coeficiente principal de  $f$  en los casos
    - i)  $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$
    - ii)  $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$
    - iii)  $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$
  3. Hallar, cuando existan, todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que
    - i)  $f^2 = Xf + X + 1$
    - ii)  $f^2 - Xf = -X^2 + 1$
    - iii)  $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$
    - iv)  $f \neq 0$  y  $f^3 = \text{gr}(f).X^2f$
  4. Hallar el cociente y el resto de la división de  $f$  por  $g$  en los casos
    - i)  $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4, \quad g = X^2 + 2$
    - ii)  $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X^3 + 1$
    - iii)  $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X + 1$
    - iv)  $f = 6X^5 + 3X^2 - 9X + 1, \quad g = 3X + 2$
    - v)  $f = X^9 - 3X^7 + X^6 - 2X^5 + 3X^3 - X^2 + 3, \quad g = X^5 + 4X - 1$
  5. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que
    - i)  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$
    - ii)  $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$  sea divisible por  $X^2 + X + 1$
    - iii) el resto de la división de  $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$
- Definición:** Sea  $\mathbf{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ . Dados  $f, g, h \in \mathbf{K}[X]$  decimos que  $f$  es congruente a  $g$  módulo  $h$  si  $h \mid f - g$ . En tal caso escribimos  $f \equiv g \pmod{h}$ .
6. Sea  $\mathbf{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  y sea  $h \in \mathbf{K}[X]$ . Probar que si  $f, g, p, q \in \mathbf{K}[X]$  entonces
    - i)  $f \equiv f \pmod{h}$
    - ii) si  $f \equiv g \pmod{h}$  entonces  $g \equiv f \pmod{h}$
    - iii) si  $f \equiv g \pmod{h}$  y  $g \equiv p \pmod{h}$  entonces  $f \equiv p \pmod{h}$
    - iv) si  $f \equiv g \pmod{h}$  y  $p \equiv q \pmod{h}$  entonces  $f + p \equiv g + q \pmod{h}$  y  $f.p \equiv g.q \pmod{h}$
    - v) si  $f \equiv g \pmod{h}$  entonces  $f^n \equiv g^n \pmod{h}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
    - vi)  $r$  es el resto de la división de  $f$  por  $h$  si y sólo si  $f \equiv r \pmod{h}$  y  $r = 0$  ó  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$

7. Hallar el resto de la división de  $f$  por  $h$  en los casos
- $f = X^{353} - X - 1, \quad h = X^{31} - 2$
  - $f = X^{45} + X^{28} - X^{13} + 3, \quad h = X^{17} + 5$
  - $f = X^{1000} - X^{40} + 11X^{20} + 12X^2 - 2, \quad h = X^6 + 1$
  - $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1$
8. i) Sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  y sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $a \equiv b \pmod{m}$  entonces  $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$
- ii) Probar que no existe  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tal que  $f(3) = 4$  y  $f(-2) = 7$
9. Hallar todos los  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tales que
- $f$  es mónico de grado 3 y  $f(\sqrt{2}) = 5$
  - $f$  es mónico de grado 3 y  $f(1) = -f(-1)$
10. i) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$
- ii) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Z}[X]$  de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$
- iii) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado 4 cuyas únicas raíces complejas sean  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$
11. Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1) = -2, f(2) = 1$  y  $f(-1) = 0$ . Hallar el resto de la división de  $f$  por  $X^3 - 2X^2 - X + 2$
12. Sea  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Hallar el resto de la división de  $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$  por  $X^3 - X$
13. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\mathbf{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  y sea  $a \in \mathbf{K}$ . Probar que
- $X - a \mid X^n - a^n$
  - si  $n$  es impar entonces  $X + a \mid X^n + a^n$
  - si  $n$  par entonces  $X + a \mid X^n - a^n$
14. Calcular el máximo común divisor entre  $f$  y  $g$  y escribirlo como combinación lineal de  $f$  y  $g$  siendo
- $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$
  - $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X$
  - $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1$
15. i) Sean  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Probar que  $a$  es raíz de  $f$  y de  $g$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $(f : g)$
- ii) Hallar todas las raíces complejas de  $X^4 + 3X - 2$  sabiendo que tiene una raíz común con  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$
16. a) Hallar todas las raíces racionales de
- $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$
  - $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$
  - $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$
- b) Probar que  $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$  no tiene raíces racionales

17. i) Hallar todas las raíces complejas de  $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$  sabiendo que  $2 - \sqrt{3}$  es raíz de  $f$   
 ii) Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  mónico de grado mínimo que tenga a  $1 + 2\sqrt{5}$  y a  $3 - \sqrt{2}$  como raíces  
 iii) Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio de grado 5. Probar que si  $\sqrt{2}$  y  $1 + \sqrt{3}$  son raíces de  $f$  entonces  $f$  tiene una raíz racional  
 iv) Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1 + \sqrt{2}) = 3$ ,  $f(2 - \sqrt{3}) = 3$  y  $f(1 + \sqrt{5}) = 3$ . Calcular el resto de la división de  $f$  por  $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$
18. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sean  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$  tales que  $a_j \neq a_k$  si  $j \neq k$ . Probar que

$$f = \sum_{k=0}^n b_k \left( \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$$

es el único polinomio en  $\mathbb{C}[X]$  que es nulo o de grado menor o igual que  $n$  y que satisface  $f(a_k) = b_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$

19. Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo tal que  
 i)  $f(1) = 3$ ,  $f(0) = \frac{1}{4}$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 3$  y  $f(-1) = 1$   
 ii)  $f(2) = 0$ ,  $f(-3) = \frac{1}{2}$ ,  $f(3) = -1$  y  $f(-2) = 1$
20. Hallar todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que  $X^3 f' = f^2$
21. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1, \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2 f_n' \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $\text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

22. Determinar la multiplicidad de  $a$  como raíz de  $f$  en los casos  
 i)  $f = X^5 - 2X^3 + X$ ,  $a = 1$   
 ii)  $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2$ ,  $a = \frac{1}{2}$   
 iii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4$ ,  $a = i$   
 iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$ ,  $a = 2$
23. i) Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + a$  tiene todas sus raíces simples  
 ii) Determinar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales  $f = X^{2n+1} - (2n + 1)X + a$  tiene al menos una raíz múltiple
24. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $X^6 - 2X^5 + (1 + a)X^4 - 2aX^3 + (1 + a)X^2 - 2X + 1$  es divisible por  $(X - 1)^3$
25. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que 1 sea raíz **doble** de  $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2 + 3a)X - 2a$
26. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n X^k$  tiene todas sus raíces simples

27. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$  tiene todas sus raíces simples

28. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1, \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que  $i$  es raíz **doble** de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

29. Sea  $f \in \mathbb{C}[X]$ . Probar que  $a \in \mathbb{C}$  es raíz múltiple de  $f$  si y sólo si es raíz de  $(f : f')$ . Deducir que si  $f \in \mathbb{Q}[X]$  es irreducible entonces tiene todas sus raíces simples

30. Factorizar el polinomio  $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

31. Factorizar el polinomio  $X^4 - 6X^2 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

32. Factorizar el polinomio  $X^6 - 2$  en  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

33. Factorizar el polinomio  $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que  $1 + 2i$  es raíz

34. Factorizar el polinomio  $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  es raíz

35. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = X^4 - (a + 4)X^3 + (4a + 5)X^2 - (5a + 2)X + 2a$  tenga a  $a$  como raíz **doble**. Para cada valor de  $a$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

36. Factorizar el polinomio  $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que  $\sqrt{2}i$  es raíz múltiple de  $f$

37. Factorizar el polinomio  $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura

38. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de  $a$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

39. Sean  $a, b$  y  $c$  las raíces complejas de  $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$ .

a) Hallar

i)  $a + b + c$

ii)  $ab + ac + bc$

iii)  $abc$

iv)  $a^2 + b^2 + c^2$

v)  $a^3 + b^3 + c^3$

vi)  $a^4 + b^4 + c^4$

vii)  $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$

viii)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

ix)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

b) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean  $a + b$ ,  $a + c$  y  $b + c$

40. Factorizar el polinomio  $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que la suma de tres de sus raíces es  $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

41. Hallar todas las raíces complejas del polinomio  $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$  sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6