Algebra I
Recuperación Primer Parcial (14-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Se define en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^2 + 3b = b^2 + 3a.$$

   i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   ii) Si $x \in \mathbb{Z}$, probar que existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \sim m$.

2. Hallar (y probar) una fórmula para el término general de la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por la siguiente recurrencia:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 2 \\ x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

3. Sean $A = \{1, 2, \cdots, 10\}$ y $B = \{1, 2, \cdots, 20\}$. Calcular el número de funciones inyectivas $f : A \to B$ tales que $f(1) + f(4) + f(7) = 8$.

4. Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $4 \mid a$, $8 \mid b$ y $31a + 9b = 128$.

5. Calcular el resto de dividir por 15 la suma de los divisores positivos de 8^{21}.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Primer Parcial (14-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 2

1. Se define en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^2 + 2b = b^2 + 2a.$$

   i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   ii) Si $x \in \mathbb{Z}$, probar que existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \sim m$.

2. Hallar (y probar) una fórmula para el término general de la sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ definida por la siguiente recurrencia:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \ , \ x_1 = 3 \\ x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

3. Sean $A = \{1, 2, \cdots, 8\}$ y $B = \{1, 2, \cdots, 14\}$. Calcular el número de funciones inyectivas $f : A \to B$ tales que $f(2) + f(5) + f(8) = 9$.

4. Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $3 \mid a$, $6 \mid b$ y $58a + 34b = 240$.

5. Calcular el resto de dividir por 80 la suma de los divisores positivos de 27^{17}.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.