Algebra I

Segundo Cuatrimestre — 2006

Práctica 1: Conjuntos, relaciones y funciones

Si A es un subconjunto de un conjunto referencial V, denotaremos por A' al complemento de A respecto de V.

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}, -1\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   a) $3 \in A$; *d*) $\{3\} \subseteq A$; *g*) $\{-1, 2\} \subseteq A$;
   b) $\{1, 2\} \subseteq A$; *e*) $\{\{3\}\} \subseteq A$; *h*) $\emptyset \subseteq A$;
   c) $\{1, 2\} \in A$; *f*) $\emptyset \in A$; *i*) $\{1, 2, -1\} \in A$.

2. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$, $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$;
   b) $A = \{1, 2, 0, -1, -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| \leq 1\}$;
   c) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
   d) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$;
   e) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$.

3. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3 - 5, 7, -8, 11\}$, encontrar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \bigtriangleup B$.

4. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de } 15\}$, hallar el complemento del subconjunto A de V definido por

   $$A = \{n \in V : n \geq 132\}.$$

5. Dado el conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$ y los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ hallar:

   a) $A \cap (B \bigtriangleup C)$; *c*) $(A - B) \cap C$; *e*) $A' \cap B' \cap C'$;
   b) $(A \bigtriangleup B) - C$; *d*) $(A \cup B') \cap C$; *f*) $(A - B') \bigtriangleup C$.

6. En un grupo de 110 alumnos hay 63 alumnos que estudian inglés, 30 que estudian alemán y 50 que estudian francés. Sabiendo que hay 7 alumnos que estudian los tres idiomas, 30 que sólo estudian inglés, 13 que sólo estudian alemán y 25 que sólo estudian francés, determinar:

   a) ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas?
   b) ¿Cuántos alumnos estudian inglés y alemán pero no francés?

c) ¿Cuántos alumnos estudian alemán y francés pero no inglés?

d) ¿Cuántos alumnos estudian inglés y francés pero no alemán?

e) ¿Cuántos alumnos no estudian ningún idioma?

7. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn:

a) $A \cap (B \cup C)$;

b) $A \cup (B \cap C)$;

c) $A' \cup (B \cap C)$;

d) $(A \cup B') \cap C$;

e) $A \triangle (B \cup C)$;

f) $(A \triangle B) \cap (C - A)$;

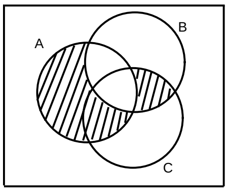
g) $A - (B' \triangle C)$;

h) $A \cup (B \triangle C)$;

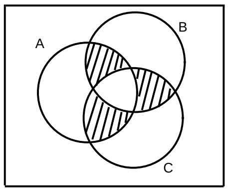
i) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

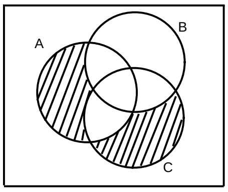
a)



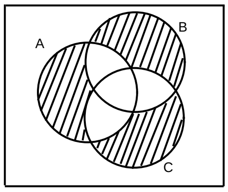
c)



b)



d)



9. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los conjuntos A, B y C y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;

b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$;

c) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$;

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

e) $C \subseteq A \implies B \cap C \subseteq (A \triangle B)'$;

f) $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$;

g) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$;

h) $A \triangle \emptyset = A$.

10. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;

c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$;

e) $A - (A \triangle B) = A \cap B$;

f) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$;

g) $A \subseteq B \implies A \triangle B = B \cap A'$;

h) $A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$;

i) $C \subseteq A \implies (A \cup B) \cap C' = (B - C) \cup (A \triangle C)$;

j) $A \cap C = \emptyset \implies A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

11. *a*) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los siguientes casos:

i) $A = \emptyset$	*iv*) $A = \{1, a, \{-1\}\}$;
ii) $A = \{1\}$;	*v*) $A = \{1, \{1, 2\}\}$;
iii) $A = \{a, b\}$;	*vi*) $A = \{1, 3, 5, \emptyset\}$.

b) ¿Qué relación existe entre la cantidad de elementos de A y la de su conjunto de partes?

c) Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

12. *a*) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{a, b, c\}$. Hallar $A \times A$, $B \times C$, $(A \cap B) \times C$, $(A \cup B) \times C$ y $(A - B) \times B$

b) Sean X e Y conjuntos. Si X tiene n elementos e Y tiene m elementos, ¿cuántos elementos tiene $X \times Y$?

c) Sean A, B y C conjuntos. Probar que:

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$.

13. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuántas relaciones de A en B hay?

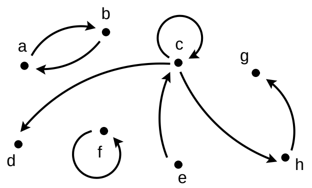
14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (6,4), (4,6), (4,4), (6,6)\}$$

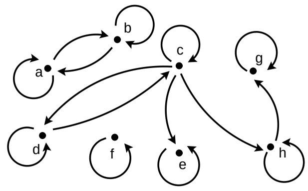
dibujando 6 puntos en el plano que representen cada uno de los elementos de A y una flecha de a a b para cada $(a, b) \in \mathcal{R}$. Viendo el gráfico determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

15. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

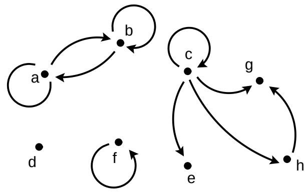
a)



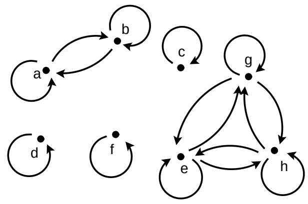
b)



c)



d)



16. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

    a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$;

    b) $A = \{1,2,3,4,5\}$,
    $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$;

    c) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$;

    d) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a+b \text{ es par}\}$;

    e) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a+b \text{ es impar}\}$;

    f) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| \leq |b|\}$;

    g) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por
    $$A \mathrel{\mathcal{R}} B \iff 2 \notin A - B;$$

    h) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por
    $$A \mathrel{\mathcal{R}} B \iff A \cap \{1,2,3\} \subseteq B \cap \{1,2,3\};$$

    i) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por
    $$a \mathrel{\mathcal{R}} b \iff a + 3b \text{ es divisible por } 4;$$

    j) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por
    $$a \mathrel{\mathcal{R}} b \iff b \text{ es múltiplo de } a;$$

17. Dar un ejemplo de una relación en $\mathbb{R}$ que:

    a) sea simétrica y antisimétrica;

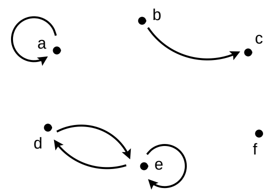
    b) no sea ni simétrica ni antisimétrica;

    c) sea simétrica y transitiva pero no reflexiva;

    d) sea reflexiva y simétrica pero no transitiva;

    e) sea de equivalencia y de orden.

18. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



¿Cuál es la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

a) reflexiva;
b) simétrica;
c) transitiva;
d) antisimetrica;
e) reflexiva y simétrica;
f) simétrica y transitiva;
g) reflexiva y transitiva;
h) de equivalencia.

19. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ encuentre una relación de orden $\mathcal{R}$ en A que tenga 12 elementos y para la cual sea $(a, b) \in \mathcal{R}$, $(e, a) \in \mathcal{R}$ y $(c, d) \notin \mathcal{R}$. ¿Es única?

20. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (a,b), (b,a), (a,f), \\ (f,a), (b,f), (f,b), (c,e), (e,c)\},$$

hallar:

a) la clase de b;
b) la clase de c;
c) la clase de d;
d) la partición asociada a $\mathcal{R}$.

21. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$.

22. Hallar todas las particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A?

23. *a*) Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los siguientes casos:
   i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$;
   ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$;
   iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$;
   iv) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, e)\}$;
   v) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} : a = 2b - 3\}$;
   vi) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : a = 2b - 3\}$;

vii) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \text{ es divisible por } 5\}$;

viii) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = a^2\}$.

b) Para cada una de las relaciones de A en B definidas en a) que sean funciones hallar la imagen y determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

24. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^3 - 5$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^2 - 5$;

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (2x, x^2, x - 7)$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 6;; \\ x + 6, & \text{si } x \geq 6; \end{cases}$$

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n + 1, & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2n, & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

h) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a,b) = 3a - 2b$;

i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(a) = \begin{cases} a + 1, & \text{si } a \text{ es par;} \\ a - 1, & \text{si } a \text{ es impar;} \end{cases}$$

25. *a)* Dadas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{si } n \text{ es divisible por } 6; \\ 3n + 1, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y $g(n,m) = n(m + 1)$, calcular $(f \circ g)((3,4)$, $(f \circ g)((2,5))$ y $(f \circ g)((3,2))$.

b) Dadas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 7; \\ 2x - 1, & \text{si } x > 7; \end{cases}$$

y $g(n) = \sqrt{n}$, hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:

i) $(f \circ g)(n) = 13$;

ii) $(f \circ g)(n) = 15$.

26. Hallar $f \circ g$ en los siguientes cases:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 18$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 18$;

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con

$$f(n) = \begin{cases} n-2, & \text{si } n \text{ es divisible por 4;} \\ n-1, & \text{si } n \text{ no es divisible por 4;} \end{cases}$$

y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 4n$.

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 5, 3x)$
$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \sqrt{n}$

27. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ denota la función identidad.

28. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \to C$ y $g : A \to B$ son funciones entonces valen:

a) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva;

b) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva;

c) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva;

d) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva;

e) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva

John Venn
1834–1923, Inglaterra