ALGEBRA I
Segundo Cuatrimestre — 2006

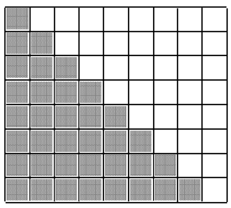
Práctica 2: Números naturales, principio de inducción

1. Determinar si $P(1)$ es verdadera y para cuáles $k \in \mathbb{N}$ vale que $P(k)$ implica $P(k+1)$ en cada uno de los siguientes casos

   a) $P(n) : n \geq n^2$;
   b) $P(n) : 2^n + 3^n \leq 5^n$;
   c) $P(n) : n \geq 13$;
   d) $P(n) : 2^n > n^2$;
   e) $P(n) : n + 6 = n + 88$;
   f) $P(n) : 2^n \geq n^2 + 5$.

2. *a*) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$:

   i) contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama

   ii) usando la identidad

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &\qquad = [1+n] + [2 + (n-1)] + [3 + (n-2)] + \ldots; \end{aligned}$$

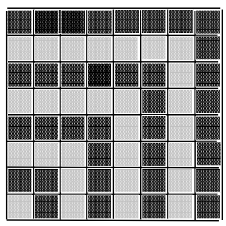
   iii) usando el principio de inducción;

   b) Deducir de a) que para todo $n \in \mathbb{N}$, es

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

3. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

   a) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama

   b) usando el ejercicio 2;

c) usando el principio de inducción.

4. Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

   a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$;
   b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$;
   c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$;
   d) $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$.

5. Calcular

   a) $\sum_{i=1}^{n} (4i + 1)$;
   b) $\sum_{i=6}^{n} 2(i - 5)$, de las siguientes dos maneras:
      i) usando las propiedades de la sumatoria
      ii) haciendo el cambio de índices $j = i - 5$ y usando luego la parte b) del ejercicio 2.
   c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$);
   d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

6. Probar que las siguientes igualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

   a) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
   b) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$;
   c) $\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2 - 1} = \frac{n+1}{2n+1}$;
   d) $\sum_{i=1}^{n} (2i + 1) 3^{i-1} = n,3^n$;
   e) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$;
   f) $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1 - 2n)$.

7. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $n < 2^n$;
   b) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$;
   c) $3^n \geq n^3$;

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$;

e) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$;

f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}.$$

Deducir que si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $a \neq 1$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

9. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq -1$. Probar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + na$. ¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

10. Probar que, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, vale

a) $n! \geq \frac{1}{2}3^{n-1}$;

b) $\binom{2n}{n} \leq 4^n$;

c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$;

d) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$;

11. Probar que:

a) $n! \geq 3^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$:

b) $3^n - 2^n > n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$;

c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$;

d) $\binom{2n}{n} > n2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

12. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ valen:

a) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$;

b) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.

13. a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n, \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1) \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

d) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n}$.

14. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, hallar una fórmula para el término general y demostrar su validez:

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$ si $n \in \mathbb{N}$;
b) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ si $n \in \mathbb{N}$;
c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ si $n \in \mathbb{N}$;
d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n\, a_n$ si $n \in \mathbb{N}$;
e) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

15. *a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1.$$

b) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

i) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n^3$ si $n \in \mathbb{N}$;
ii) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}n^2$ si $n \in \mathbb{N}$;
iii) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia: usar a) y el ejercicio 6.

c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^3$ y, usando esto, calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$.
Sugerencia: usar la relación

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1).$$

d) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + n\,n! \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n!$ y, usando esto, calcular $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$.

16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

a) Probar que $a_n \leq \frac{1}{2n}\binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Probar que $a_n > \frac{1}{3^{n-1}}\binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

17. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de *Fibonacci* definida por

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que

$$a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

18. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, conjeturar una fórmula para el término general y probar su validez

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = n\,a_{n+1} + 2(n+1)a_n$ si $n \in \mathbb{N}$).

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n$ si $n \in \mathbb{N}$.

c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i\,a_i$ si $n \in \mathbb{N}$.

d) $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

si $n \in \mathbb{N}$.

19. *a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{3}{2} \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\,a_n \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Leonardo Pisano Fibonacci
1170–1250, Italia