
ALGEBRA I

Segundo Cuatrimestre — 2006

Práctica 7: Polinomios

1. Calcular el coeficiente de X^{20} de f si:
 - a) $f = (X - 3)^{133}$;
 - b) $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$;
 - c) $f = (X^5 + 4)^7 - (X + 1)^{25} - 3$;
 - d) $f = X^{18}(X^4 + 2X - 3)^{13} + 3(X^5 - 2)^7 - X^{19}(2X^6 + 7X^2 + 5X - 3)^{10}$.
2. Calcular el grado y el coeficiente principal de f en los casos
 - a) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$;
 - b) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$;
 - c) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.
3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que
 - a) $f^2 = Xf + X + 1$;
 - b) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$;
 - c) $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$;
 - d) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f$.
4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos
 - a) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$, $g = X^2 + 2$;
 - b) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$, $g = 2X^3 + 1$;
 - c) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$, $g = 2X + 1$.
 - d) $f = 6X^5 + 3X^2 - 9X + 1$, $g = 3X + 2$;
 - e) $f = X^9 - 3X^7 + X^6 - 2X^5 + 3X^3 - X^2 + 3$, $g = X^5 + 4X - 1$.
5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que
 - a) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$;
 - b) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$;
 - c) el resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

Definición: Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Dados $f, g, h \in \mathbb{K}[X]$ decimos que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso escribimos $f \equiv g \pmod{h}$.

1. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} y sea $h \in \mathbb{K}[X]$. Probar que si $f, g, p, q \in \mathbb{K}[X]$ entonces:

- a) $f \equiv f \pmod{h}$;
- b) si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $g \equiv f \pmod{h}$;
- c) si $f \equiv g \pmod{h}$ y $g \equiv p \pmod{h}$ entonces $f \equiv p \pmod{h}$;
- d) si $f \equiv g \pmod{h}$ y $p \equiv q \pmod{h}$ entonces $f + p \equiv g + q \pmod{h}$ y $fp \equiv gq \pmod{h}$;
- e) si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- f) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\text{gr } r < \text{gr } h$;
2. Hallar el resto de la división de f por h en los casos
- a) $f = X^{353} - X - 1, h = X^{31} - 2$;
- b) $f = X^{45} + X^{28} - X^{13} + 3, h = X^{17} + 5$;
- c) $f = X^{1000} - X^{40} + 11X^{20} + 12X^2 - 2, h = X^6 + 1$;
- d) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, h = X^{100} - X + 1$.
3. a) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Probar que si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.
- b) Probar que no existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(3) = 4$ y $f(-2) = 7$.
4. Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ tales que:
- a) f es mónico de grado 3 y $f(\sqrt{2}) = 5$;
- b) f es mónico de grado 3 y $f(1) = -f(-1)$.
5. a) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean $1, -\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.
- b) Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean $1, -\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.
- c) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas únicas raíces complejas sean $1, -\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.
6. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2, f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.
7. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$.
8. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} y sea $a \in \mathbb{K}$. Probar que
- a) $X - a \mid X^n - a^n$;
- b) si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$;
- c) si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.
9. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g si
- a) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$;
- b) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, g = X^3 + X$;

- c) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, g = X^4 + 2X + 1$.
10. a) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.
- b) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.
11. a) Hallar todas las raíces racionales de
- $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$;
 - $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$;
 - $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$.
- b) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.
12. a) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f .
- b) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces.
- c) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.
- d) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3, f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$.
13. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tales que $a_j \neq a_k$ si $j \neq k$. Probar que

$$f = \sum_{k=0}^n b_k \left(\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$$

es el único polinomio en $\mathbb{C}[X]$ que es nulo o de grado menor o igual que n y que satisface $f(a_k) = b_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.

14. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que:
- $f(1) = 3, f(0) = \frac{1}{4}, f(\frac{1}{2}) = 3$ y $f(-1) = 1$;
 - $f(2) = 0, f(-3) = \frac{1}{2}, f(3) = -1$ y $f(-2) = 1$.
15. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $X^3 f' = f^2$.
16. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por
- $$f_1 = X^3 + 2X - 1, \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2 f_n', \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
- Probar que $\text{gr } f_n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
17. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los siguientes casos:
- $f = X^5 - 2X^3 + X, a = 1$;

- b) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2$, $a = \frac{1}{2}$;
 c) $f = X^6 - 3X^4 + 4$, $a = i$;
 d) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$, $a = 2$.
18. a) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + a$ tiene todas sus raíces simples.
 b) Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n + 1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple.
19. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $X^6 - 2X^5 + (1 + a)X^4 - 2aX^3 + (1 + a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X - 1)^3$.
20. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2 + 3a)X - 2a$.
21. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n X^k$ tiene todas sus raíces simples.
22. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ tiene todas sus raíces simples.
23. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por
- $$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1, \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
- Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.
24. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz múltiple de f si y sólo si es raíz de $(f : f')$. Deducir que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible entonces tiene todas sus raíces simples.
25. Factorizar el polinomio $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
26. Factorizar el polinomio $X^4 - 6X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
27. Factorizar el polinomio $X^6 - 2$ en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
28. Factorizar el polinomio $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $1 + 2i$ es raíz.
29. Factorizar el polinomio $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.
30. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a + 4)X^3 + (4a + 5)X^2 - (5a + 2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
31. Factorizar el polinomio $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $\sqrt{2}i$ es raíz múltiple de f .
32. Factorizar el polinomio $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

33. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

34. Sean a , b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.

a) Hallar

i) $a + b + c$;

ii) $ab + ac + bc$;

iii) abc ;

iv) $a^2 + b^2 + c^2$;

v) $a^3 + b^3 + c^3$;

vi) $a^4 + b^4 + c^4$;

vii) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$;

viii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$;

ix) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

b) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a + b$, $a + c$ y $b + c$.

35. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

36. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6 .



Ferdinand Gotthold Max Eisenstein
1823–1852, Alemania