ALGEBRA I - Práctica N°4 (Primera parte) - Verano de 2007

Números enteros

Ejercicio 1. Dados a, b y c números enteros, decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justificar.

i) $6 \mid a \quad \Rightarrow \quad 3 \mid a$	ii) $6 \mid a \quad \Rightarrow \quad 9 \not\mid a$	iii) $6 \not\mid a \quad \Rightarrow \quad 3 \not\mid a$
iv) $6 \not\mid a \Rightarrow 2 \not\mid a$ y $3 \not\mid a$	v) $2 \mid a \quad \Rightarrow \quad 2 \mid a^2$	vi) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$
vii) $a \mid a + b \;\Rightarrow\; a \mid b$	viii) $a \mid b$ y $b \mid a \Rightarrow a = b$	ix) $a \mid a^2$
x) $a \mid b^2 \quad \Rightarrow \quad a \mid b$	xi) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$	xii) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$

Ejercicio 2.

i) Encontrar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3n - 11 \mid 3n - 1$

ii) Encontrar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n + 1 \mid n^2 + 3$

iii) Encontrar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n - 2 \mid n^3 - 2$

Ejercicio 3. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, vale:

i) $7 \mid 5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$

ii) $24 \mid 5^{2n} + 12n^2 - 36n - 1$

iii) $2304 \mid 7^{2n} - 48n - 1$

iv) $111 \mid 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$

Ejercicio 4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

i) Probar que $a - b \mid a^n - b^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Comparar con el Ejercicio 7 de la Práctica 2.

ii) Deducir del ítem anterior que:
   a) $a + b \mid a^n + b^n \quad \forall\, n$ impar
   b) $a + b \mid a^n - b^n \quad \forall\, n$ par

Ejercicio 5. Sea $n \in \mathbb{N}$.

i) Probar que el producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$

ii) Probar que $2 \mid \binom{2n}{n}$

(*) iii) Probar que $(n + 1) \mid \binom{2n}{n}$

Ejercicio 6. Calcular el cociente y el resto de la división entera de a por b en los siguientes casos:

i) $a = 3\ ,\ b = 7$

ii) $a = -3\ ,\ b = 7$

iii) $a = 5\ ,\ b = -3$

iv) $a = -8\ ,\ b = -5$

v) $a = n^2 - 1\ ,\ b = n \quad (n \in \mathbb{N})$

vi) $a = n^2\ ,\ b = n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

Ejercicio 7. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 10 es 3 calcular el resto de dividir

i) $3a + 1$ por 10

ii) a^2 por 10

iii) $10a - 3$ por 10

iv) $1 - a$ por 5

v) $10a - 3$ por 100

Ejercicio 8. Hallar todos los $n \in \mathrm{N}$ tales que el resto de la división de $n^3 + 4n + 5$ por $n^2 + 1$ sea $n - 1$.

Ejercicio 9. Sean a y $b \in \mathbb{Z}$.

i) Calcular los posibles restos de la división de a^i por 7 para $1 \leq i \leq 7$.

ii) Probar las siguientes afirmaciones:

a) $7 \mid a^7 - a$

b) $7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow 7 \mid a$ y $7 \mid b$

c) $a^2 + 2b^2 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod 7$

d) $a^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (a-1)(a-2)(a+3)$

Ejercicio 10. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

i) Calcular los posibles valores del resto de la división de a^4 por 10.

ii) Calcular los posibles valores del resto de la división de $(a^{8204} + b^{4028})$ por 10.

Ejercicio 11. Sean a ,b y $c \in \mathbb{Z}$. Probar que

i) $2 \not| \, a \Rightarrow 8 \mid a^2 - 1$ y $16 \mid a^4 - 1$

ii) $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Rightarrow 5 \mid a$ ó $5 \mid b$

iii) $a^2 + b^2 \not\equiv 3, 6, 7 \pmod 8$

iv) $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 \pmod 8$

Ejercicio 12. Sean a, b y $c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2+b^2=c^2$. Probar las siguientes afirmaciones:

i) $3\,|\,a$ ó $3\,|\,b$

ii) $2\,|\,a$ ó $2\,|\,b$

iii) $5\,|\,a$ ó $5\,|\,b$ ó $5\,|\,c$

iv) $4\,|\,a$ ó $4\,|\,b$

Ejercicio 13.

i) Criterio de divisibilidad por 3: Probar que un número natural es divisible por 3 si y sólo si la suma de todos sus dígitos es divisible por 3.

ii) Enunciar y demostrar los criterios de divisibilidad por 4, 5, 8, 9 y 11.

Ejercicio 14. Calcular los siguientes máximos comunes divisores y escribirlos como combinación lineal entera de los números dados:

i) $(168 : 180)$

ii) $(1159 : 665)$

iii) $(n^2+1 : n+1)$ donde n es un número natural impar.

iv) $(2^{3n}-1 : 2^{7n}-1)$ donde n es un número natural.

Ejercicio 15. Hallar dos naturales a y b tales que $b < a < 100$; $(a : b) = 2$ y con la condición de que el algoritmo de Euclides entre a y b utilice por lo menos 7 pasos.

Ejercicio 16. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Se aplica el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor entre n^3 y 8. ¿Cuántas divisiones habrá que hacer como máximo? Encontrar todos los $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ tales que sea necesaria dicha cantidad de divisiones.

Ejercicio 17. Dados a y $b \in \mathbb{Z}$, probar las siguientes afirmaciones:

i) $(a^2 : a+1) = 1$

ii) $(a : b) = 1 \Rightarrow (3a-b : 4a+11b) = 1$ ó 37

iii) $(a : b) = 1 \Rightarrow (7a+3b : 4a-5b) = 1$ ó 47

Ejercicio 18.

i) Determinar todos los a y $b \in \mathbb{N}$ coprimos tales que $\dfrac{3}{a} + \dfrac{a+4}{b} \in \mathbb{Z}$.

ii) Determinar todos los a y $b \in \mathbb{N}$ coprimos tales que $3 \cdot \dfrac{a^2}{b^2} - 7 \cdot \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 19.

i) Calcular todos los divisores de 1155, -3528, 900, 10^6 y 10^n.

ii) Calcular el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $1275 \cdot n$ sea un cuadrado.

iii) Sean $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) $8 \mid a^2 \Rightarrow 4 \mid a$

b) $9 \mid a^2 \Rightarrow 9 \mid a$

c) $6 \mid a^2 \Rightarrow 6 \mid a$

d) $a^2 \mid b^2 \Rightarrow a \mid b$

Ejercicio 20.

i) Decidir si existen a y $b \in \mathbb{Z}$, no nulos, que satisfagan:

a) $a^2 = 2b^2$

b) $2a^2 = 3b^2$

c) $a^2 = 15b^2$

d) $a^3 = b^2$

ii) Dado p un primo positivo y n un número natural mayor o igual que 2, probar que $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

Ejercicio 21.

i) Calcular la mayor potencia de 3 que divide a 80!

ii) Calcular la mayor potencia de 18 que divide a 80!

iii) Calcular en cuántos ceros termina el desarrollo decimal de 80!

Ejercicio 22.

i) Criba de Eratóstenes: Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que n es compuesto si y sólo si es divisible por un primo positivo $p \leq \sqrt{n}$

ii) Determinar cuáles de los siguientes números son primos:

$$379 \qquad 503 \qquad 799 \qquad 1001 \qquad 4001 \qquad 11111$$

Ejercicio 23.

i) Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{1759} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$

(*) ii) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$

Ejercicio 24.

i) Probar que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \mid (n-1)! + 1$, entonces n es un número primo.

ii) Sea u_n $(n \in \mathbb{N})$ el número natural cuyo desarrollo decimal consta de n unos. Probar que u_n primo implica n primo.

iii) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n + 1$ es primo. Probar que n es una potencia de 2.

iv) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n - 1$ es primo. Probar que n es un número primo.

Ejercicio 25. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, se verifican:

i) $(2^n + 3^n : 2^{n+1} + 3^{n+1}) = 1$

ii) $(2^n + 5^n : 2^n - 5^n) = 1$

iii) $(4^n - 3^{n+1} : 4^{n+1} + 3^n) = 1$ ó 13

Ejercicio 26.

i) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$. Probar que $(a^2 \cdot b : 25a + 25b) = 125$

ii) Dado $n \in \mathbb{N}$, calcular $(10^n - 1 : 198)$

iii) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 25) = 5$. Calcular $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$

iv) Sea d_n $(n \in \mathbb{N})$ el número natural cuyo desarrollo decimal consta de $2n$ dos consecutivos (por ejemplo, $d_1 = 22$; $d_2 = 2222$; $d_3 = 222222$). Calcular $(d_n : 198)$ en función de n.