2.7 Ejercicios

1. Sea $(A, +, .)$ un anillo. Ver que el producto en $M_n(A)$ dado por
$$(m.n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{kj}$$
(m y n son dos matrices con coeficientes en A, $(m)_{ij} = m_{ij}$, idem n) es un producto asociativo, poniendo además la suma coordenada a coordenada, $M_n(A)$ es un anillo. Ver que si $n > 1$, $M_n(A)$ nunca es conmutativo, sin importar si A lo es o no.

2. Sea A un anillo conmutativo. Convencerse de que $\det : M_n(A) \to A$ es una función multiplicativa, es decir, que la misma demostración que se usó en algebra lineal para ver que $\det(M.N) = \det(M).\det(N)$ vale. Ver que $M \in M_n(A)$ es inversible si y sólo si $\det(M)$ es una unidad. Encuentre todos los elementos de $\mathcal{U}(M_2(\mathbb{Z}_4))$.

3. Sea $G_3 = \{1, t, t^2, \text{ con } t^3 = 1\}$, $A = \mathbb{R}[G_3]$.
   (a) Sea $e = \frac{1}{3}(1 + t + t^2)$ y $e' = (1 - e)$. Ver que $e^2 = e$, ${e'}^2 = e'$ y $e.e' = 0 = e'.e$.
   (b) Sea B el anillo $e.A$ y C el anillo $e'.A$ con la multiplicación inducida por la de A. (¿porqué no son subanillos de A?). Probar que la aplicación
   $$\begin{aligned} A &\to B \times C \\ a &\mapsto (e.a, e'.a) \end{aligned}$$
   define un isomorfismo de anillos, en donde $B \times C$ tiene la suma y producto coordenada a coordenada $(b, c)(b', c') = (bb', cc')$.
   (c) Ver que B tiene dimensión (sobre $\mathbb{R}$) 1 y C tiene dimensión 2, una base de B es por ejemplo $\{e\}$, y una base de C es $\{e', f\}$ donde $f = t - t^2 = e'.(t - t^2)$. Ver que valen los siguientes isomorfismos de anillos:
      i. $B \cong \mathbb{R}$ $(e.(x.1 + y.t + z.t^2) \mapsto x + y + z)$
      ii. $f^2 = -3.e'$, luego $C \cong \mathbb{C}$ vía $(a.e' + b.j) \mapsto a + b.i$, donde $j = \frac{f}{\sqrt{3}}$.

4. Sea $A = \mathbb{C}[G_3]$, $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica primitiva de la unidad, $e_1 = \frac{1}{3}(1 + t + t^2)$, $e_2 = \frac{1}{3}(1 + \omega.t + \omega^2.t^2)$, $e_3 = \frac{1}{3}(1 + \omega^2.t + \omega.t^2)$.
   (a) $e_i.e_j = 0$ si $i \neq j$, $e_i^2 = e_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$ y $e_1 + e_2 + e_3 = 1$.
   (b) Los anillos $e_i.A$ tienen dimensión (sobre $\mathbb{C}$) igual a uno y son isomorfos a $\mathbb{C}$ (isomorfismo de anillos).
   (c) La aplicación
   $$\begin{aligned} A &\to e_1\mathbb{C} \times e_2\mathbb{C} \times e_3\mathbb{C} \\ a &\mapsto (e_1.a, e_2.a, e_3.a) \end{aligned}$$
   es un isomorfismo de anillos tomando en $e_1\mathbb{C} \times e_2\mathbb{C} \times e_3\mathbb{C}$ la suma y el producto coordenada a coordenada (es decir, con la estructura producto).

5. Sea A un anillo y $A[[x]]$ (llamado series formales con coeficientes en A e indeterminada x) el siguiente conjunto:
$$A[[x]] = A^{\mathbb{N}_0} = \{ \text{ funciones de } \mathbb{N}_0 \text{ en } A\}$$
donde se adopta por notación $\sum a_n x^n =$ la función que a cada $n \in \mathbb{N}_0$ le asigna $a_n \in A$. Se define en $A[[x]]$ la operación:
$$(\sum a_n x^n).(\sum b_n x^n) := \sum (\sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k})x^n$$
Ver que está bien definida y si definimos
$$(\sum a_n x^n) + (\sum b_n x^n) := \sum (a_n + b_n)x^n$$
entonces $A[[x]]$ resulta un anillo. ¿quién es $1_{A[[x]]}$? Sea $s \in A[[x]]$, entonces $1 + x.s$ es inversible en $A[[x]]$.

6. Sea A un anillo, probar:
   (a) Si $a \in A - \mathcal{U}(A)$ entonces existe un ideal a izquierda maximal que contiene a a.
   (b) Si $a \in A$ es un elemento nilpotente, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, entonces $1 - a$ es una unidad.
   (c) $1 - a.b$ es unidad si y sólo si $1 - b.a$ es unidad. (sug.: demuéstrelo primero suponiendo que $a.b$ es nilpotente para así hallar una relación entre $(1 - a.b)^{-1}$ y $(1 - b.a)^{-1}$, ver despues que esa relación vale en general).

7. Hallar todas las unidades de $\mathbb{Z}[x]/\langle x^3 \rangle$.

8. Sea $P \subset A$ un ideal de un anillo conmutativo A. Diremos que P es un ideal **primo** si cada vez que $a.b \in P$ entonces $a \in P$ o $b \in P$. Demuestre:

- Si $A = \mathbb{Z}$ e $I = n.\mathbb{Z}$ entonces I es un ideal primo si y sólo si n es un número primo.
- Todo ideal maximal es primo.
- I es un ideal primo si y sólo si A/I es un dominio íntegro.
- I es un ideal maximal si y sólo si A/I es un cuerpo.

9. Si I es un ideal bilátero de A entonces $M_n(I)$ es ideal bilátero de $M_n(A)$ y $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$.
10. Sea $A = k[x]$, $f \in A$ e $I = \langle f \rangle$. Ver que $A/\langle f \rangle$ es un cuerpo si y sólo si f es irreducible.
11. Sea k un cuerpo y sea $k[i]$ un k-espacio vectorial de dimensión 2, con base $\{1, i\}$, o sea, todo elemento de $k[i]$ es de la forma $a.1 + b.i$ con $a, b \in k$, que también notaremos $a + b.i$. Definimos el producto

    $$(a + b.i).(c + d.i) := ac - bd + (ad + bc).i$$

    Ver que $k[i]$ es un anillo. Si $k = \mathbb{Z}_2$ ó $\mathbb{Z}_5$, entonces $k[i]$ no es un cuerpo, si $k = \mathbb{Z}_3$ sí es un cuerpo, tambiénsi $k = \mathbb{Z}_7$.
12. Un anillo A se llama **anillo de Boole** si todos sus elementos son idempotentes (i.e. $x^2 = x$ para todo $x \in A$). Probar:
    (a) Todo anillo de Boole es conmutativo y $\forall a \in A, a = -a$.
    (b) Todo subanillo y todo cociente de un anillo de Boole es anillo de Boole.
    (c) Si X es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X)$ (las partes de X con la operación $+ =$ diferencia simétrica, y producto $=$ intersección, es un anillo de Boole.
    (d) Todo anillo de Boole es un $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial.
    (e) Sea X un conjunto, entonces $\mathbb{Z}_2^X = Func(X, \mathbb{Z}_2)$ es un anillo de de Boole.
13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morfismo de anillos. Ver:
    (a) $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ y $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es la identidad.
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es necesariamente creciente.
    (c) $f = id_{\mathbb{R}}$.
14. Sea k un cuerpo. Basándose en la demostración de que $\mathbb{Z}$ es un dominio principal y usando la función grado $gr : (k[x] - \{0\}) \to \mathbb{N}_0$ ver que $k[x]$ es también un dominio principal.
15. *Enteros de Gauss.* Sea $Z[i]$ la subalgebra de $\mathbb{C}$ generada por i, es decir, los elementos de $\mathbb{C}$ de la forma $a + b.i$ con a y b in $\mathbb{Z}$. Sea $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$ la función (llamada norma) definida por

    $$N(a + b.i) = |a + b.i|^2 = a^2 + b^2$$

    (a) Ver que $N(x.y) = N(x).N(y)\ \forall x, y \in \mathbb{Z}[i]$.
    (b) Ver que si $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ entonces existen (no necesariamente únicos) $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tales que $x = q.y + r$ donde $N(r) < N(y)$. (sugerencia: hacer primero la cuenta en $\mathbb{Q}[i]$ y después volver (como pueda) a $\mathbb{Z}[i]$).
    (c) Deducir que $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio principal, por lo tanto de factorización única.
    (d) Ver que $\mathbb{Z}[i]/\langle 5 \rangle \cong \mathbb{Z}_5[i]$ que no es un cuerpo, por lo tanto $\langle 5 \rangle$ no es un ideal maximal, por lo tanto 5 se puede factorizar, factorícelo.
16. Sea A íntegro, entonces $j : A \to A_S$ ($a \mapsto \frac{a}{1}$) es inyectiva para cualquier S subconjunto multiplicativamente cerrado (de aqui en adelante se entiende que $0 \notin S$). En general, $j : A \to A_S$ es inyectiva si y solo si S no tiene divisores de cero. Dar un ejemplo en que j no sea inyectiva.
17. Sea $\mathcal{P} \subset A$ un ideal primo, entonces $S_{\mathcal{P}} := A - \mathcal{P}$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado. Idem con $\mathcal{M} \subset A$ un ideal maximal y $S_{\mathcal{M}} = A - \mathcal{M}$. NOTACION: para estos casos, se escribirá $A_{\mathcal{P}} := A_{A-\mathcal{P}}$, idem $A_{\mathcal{M}}$.
18. Sea $A = C(\mathbb{R})$ las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Sea $M = \{f \in A \ / \ f(x_0) = 0\}$. Ver que es un ideal maximal, y que $\frac{f}{1} = \frac{g}{1}$ en $A_{\mathcal{M}}$ si y sólo si existe un entorno de x_0 en donde f y g coinciden.
19. Sea la aplicación $A \to \prod_{\mathcal{M}\ \max.} A_{\mathcal{M}}$ dada por $a \mapsto \{\frac{a}{1}\}_{\mathcal{M}\ \max.}$ en donde cada $\frac{a}{1}$ pertenece al $A_{\mathcal{M}}$ correspondiente. Ver que esa aplicación es inyectiva. (sugerencia: si a es una unidad, ver que $\frac{a}{1}$ es distinto de cero en cualquier localización; si a no es una unidad, entonces existe un maximal $\mathcal{M}$ que contiene a a, ver que $\frac{a}{1} \neq 0$ en el localizado por ese maximal).
20. Sea $A = C(\mathbb{R})$, $U = (0, 1)$, $S_U = \{f \in A \ / \ f(t) \neq 0\ \forall t \in (0, 1)\}$. Probar
    (a) S_U es un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(b) Sea $res : C(\mathbb{R}) \to C(0,1)$ el morfismo $f \mapsto f|_{(0,1)}$. Ver que es un morfismo de anillos, y que S_U se mapea en unidades, luego ese morfismo se factoriza por A_{S_U}

$$\begin{tikzcd} C(\mathbb{R}) \arrow[r, "res"] \arrow[d, "j"] & C(0,1) \\ C(\mathbb{R}) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Ver que la flecha punteada es inyectiva.

(c) (opcional) Suryectividad de la flecha punteada: si $f \in A$, $f = f_+ - f_-$ con f_+ y f_- mayores o iguales que cero, asi que para ver que toda funcion continua sobre $(0,1)$ es el cociente de una continua sobre $\mathbb{R}$ dividida por otra continua que no se anula sobre $(0,1)$ basta demostrarlo para las funciones positivas. Ahora dada $f \in C(0,1)$, $f \geq 0$, se define $f_1(x) := max\{1, f(x)\}$ y $g := f - f_1$. Ver que tanto f_1 como g pertenecen a $C(0,1)$, además f_1 se puede extender a una función continua globalmente definida.
Sea $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin (0,1) \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ver que s es continua y que $s \in S_U$. Además $s.g$ es una función que puede ser definida de manera continua sobre todo $\mathbb{R}$, y la función f original en $C(0,1)$ proviene del elemento $\frac{f_1}{1} + \frac{(s.g)}{s}$.