## 3.6 Módulos cíclicos

En el caso de grupos abelianos se tenía una descripción muy concisa de los grupos cíclicos, todos son un cociente de $\mathbb{Z}$. Como los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son conocidos, entonces son conocidos todos los grupos abelianos cíclicos.

Si se tiene ahora un $A$-módulo cíclico $M$, es decir, un $A$-módulo en el que exista un elemento $x \in M$ con $A.x = \langle x \rangle = M$, podemos definir un morfismo sobreyectivo de $A$ en $M$ a través de $a \mapsto a.x$. El núcleo de esta aplicación es un submódulo (a izquierda) del $A$-módulo $A$, es decir, un ideal a izquierda de $A$, llamando $I = \mathrm{Ker}(A \to M)$, se tiene $M \cong A/I$.

Recíprocamente, si $I$ es un ideal a izquierda de $A$ entonces es un $A$-submódulo de $A$, y $A/I$ es un $A$-módulo (a izquierda), que además es cíclico, pues $A/I = \langle \overline{1} \rangle$. Luego todo módulo cíclico es isomorfo a un cociente de $A$ por un ideal a izquierda. Se conocen así todos los $A$-módulos cíclicos siempre que se tenga una caracterización de los ideales a izquierda de $A$.

## 3.7 Ejercicios

1. Definición: dado un anillo $A$ y un $A$-módulo $M$, $M$ se dice **divisible** si para cualquier $0 \neq a \in A$ y $m \in M$ existe un $m' \in M$ tal que $a.m' = m$. Sea $G_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \subset S^1$.
   (a) Probar que es un subgrupo (abeliano) de $S^1$ por lo tanto un $\mathbb{Z}$-módulo. Ver que es divisible.
   (b) Ver que $G_{p^\infty} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{p^n}$ es un submódulo de $G_\infty$ y que también es divisible.
2. Sea $A$ un anillo conmutativo y $M$ un $A$-módulo. Se define la **torsión** de $M$ como $t(M) := \{m \in M$ tal que $\exists\ a \in A$ con $a \neq 0$ y $a.m = 0\}$. Si $A$ es íntegro ver que $t(M)$ es un submódulo. ¿dónde se usa que $A$ sea íntegro?
3. Sea $A$ íntegro, $M$ y $N$ dos submódulos y $f : M \to N$ un morfismo $A$-lineal. Ver que $f(t(M)) \subset t(N)$ y por lo tanto la asignación $M \mapsto t(M)$ es funtorial. Ver que $t(t(M)) = t(M)$ y $t(M/t(M)) = 0$.
4. Viendo al grupo abeliano $M = (\mathbb{C} - \{0\}, .)$ como $\mathbb{Z}$-módulo, encontrar los elementos de torsión.
5. Caracterizar $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\langle(4,6)\rangle$ calcular $t(M)$ y $M/t(M)$.
6. Sea $A$ íntegro y $M$ un $A$-módulo divisible y sin torsión. Ver que entonces $M$ admite una estructura de $k$-espacio vectorial donde $k$ es el cuerpo de fracciones de $A$.
7. Sea $k$ un cuerpo, y $C$ la categoría formada por:
   - $Obj(C)$ = pares $(V, \phi)$ donde $V$ es un $k$-espacio vectorial y $\phi : V \to V$ es un endomorfismo.
   - Para cada par de objetos $(V, \phi)$ y $(W, \psi)$, $\mathrm{Hom}_C((V, \phi), (W, \psi)) = \{f : V \to W$ transformación lineal tal que $f(\phi(v)) = \psi(f(v))\ \forall\ v \in V\}$.

   (a) Ver que esta categoría se identifica con la categoría de $k[X]$-módulos. Probar que $(V, \phi) \cong (V, \psi)$ como $k[X]$-módulos si y sólo si $\phi$ es un endomorfismo conjugado a $\phi$, es decir, que existe un $\alpha \in Aut_k(V)$ tal que $\phi = \alpha \circ \psi \circ \alpha^{-1}$.
   (b) Sea $(V, \phi)$ como antes. Ver que los subespacios $\phi$-estables se corresponden unívocamente con los $k[X]$-submódulos de $V$, y que hallar una base en la que la matriz de $\phi$ se escriba en bloques equivale a hallar una descomposición de $V$ en $k[X]$-sumandos directos.
   (c) Encontrar un $k[X]$-módulo de dimensión 2 (sobre $k$) que no admita sumandos directos no triviales.
   (d) Si $\lambda \in k$, $ev_\lambda : k[X] \to k$ $(P \mapsto P(\lambda))$ es un morfismo de anillos, por lo tanto induce una estructura de $k[X]$-módulo sobre $k$. Sea $k_\lambda$ el $k[X]$-módulo definido de esa manera, ¿es $k_\lambda \cong k_{\lambda'}$ como $k[X]$-módulo si $\lambda \neq \lambda'$?
   (e) Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita, $\phi$ un endomorfismo de $V$. Entonces $\phi$ es diagonalizable si y sólo si $V$ se descompone como $k[X]$-módulo en suma directa de submódulos isomorfos a los $k_\lambda$ $(\lambda \in k)$.
   (f) Si $M$ es un $k[X]$-módulo cíclico, entonces o bien es de dimensión finita, o bien es isomorfo a $k[X]$ (sug. ver el teorema de 'clasificación' de grupos cíclicos y copiar la idea).

8. (Localización de módulos) Sea $A$ un anillo, $S \subset Z(A)$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y $M$ un $A$-módulo a izquierda. Se define $M_S$ como el cociente de los pares $(m,s)$ con $m \in M$ y $s \in S$ bajo la relación de equivalencia $(m,s) \equiv (m',s') \Leftrightarrow\ \exists\, t \in S$ tal que $t(s'.m - s.m') = 0$. La clase del elemento $(m,s)$ bajo esta relación se lo denotará (como era de esperar) $\frac{m}{s}$, y $M_S := \{(m,s)\ : m \in M,\ s \in S\}/\sim = \{\frac{m}{s}\ :\ m \in M,\ s \in S\}$.

   (a) Ver que $M_S$ es naturalmente un $A$-módulo a izquierda y que la función $j_M : M \to M_S\ m \mapsto \frac{m}{1}$ es $A$-lineal.

   (b) Ver que además $M_S$ es un $A_S$-módulo bajo la acción obvia $\frac{a}{s}.\frac{m}{t} = \frac{a.m}{st}$, y que además $j_M : M \to M_S$ tiene la siguiente propiedad: Si $N$ es un $A_S$-módulo (y por lo tanto tambien un $A$-módulo (¿porqué?)) y $f : M \to N$ es una morfismo $A$-lineal entonces existe una única $\overline{f} : M_S \to N$ que factoriza a $f$ a través de $j_M$, es decir, que $f = \overline{f} \circ j_M$. (diagrama de rigor:)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_M"] \arrow[d, "f"'] & M_S \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

   (c) Por cada $s \in S$ sea $M.\frac{1}{s} := M$. Ver que $M_S \cong \underset{s\in S}{\oplus} M.\frac{1}{s}/\langle t.m.\frac{1}{st} - m.\frac{1}{s}\rangle$. La función $j_M$ bajo este isomorfismo es la composición $M = M\frac{1}{1} \to \oplus_{s\in S} M.\frac{1}{s} \to^{\pi} \oplus_{s\in S} M.\frac{1}{s}/\langle t.m.\frac{1}{st} - m.\frac{1}{s}\rangle$.

   (d) Interpretar y demostrar la frase 'la asignación $M \mapsto M_S$ es funtorial'.

9. (Polinomios de Laurent) Sea $S \subset k[X]$, $S = \{1, X, X^2, X^3, ..., X^n, ...\}$. Entonces:

   (a) $k[X]_S \cong k[X, X^{-1}] \cong k[X,Y]/\langle X.Y - 1\rangle$.

   (b) Si $(V,\phi)$ es un $k[X]$-módulo, $V_S \cong V \Leftrightarrow \phi$ es un isomorfismo.

   (c) Sea $V$ es de dimensión finita, $\mathrm{Ker}(\phi^n) \subset V$ es un $k[X]$-submódulo de $V$ para todo $n$, sea $t(V) := \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\phi^n)$. Entonces $t(V)$ coincide con $\mathrm{Ker}(V \to V_S)$ y además $V_S \cong V/t(V)$. (Sugerencia: ver que $\phi : V \to V$ induce un isomorfismo $V/t(V) \to V/t(V)$ para asi obtener un morfismo natural $V_S \to V/t(V)$, para el morfismo en el otro sentido usar que $t(V) = \mathrm{Ker}(V \to V_S)$.)

10. Sea $k$ un cuerpo, probar que para $P \in k[X, X^{-1}]$, la función $l$ ($l$ de 'largo') tal que $P = \sum_{k=n} ma_k x^k \mapsto m - n =: l(P)$ donde $P = \sum_{k=n}^{m} a_k x^k$ es una escritura tal que $a_n$ y $a_m$ son ambos distintos de cero hace de $k[X, X^{-1}]$ un dominio euclideano (sugerencia: para obtener un algoritmo de división primero multiplicar por una potencia conveniente de $x$, hacer la cuenta en $k[X]$ y después volver). Ver que todo $k[X, X^{-1}]$-módulo cíclico o bien es de dimensión finita o bien es isomorfo a $k[X, X^{-1}]$.

11. Sea $(V,\phi)$ un $k[X]$-módulo con $\phi$ nilpotente. ¿Es $(V,\phi)$ un $k[[X]]$-módulo?

12. Sabiendo que en $k[[X]]$ los elementos de la forma $\lambda + x.p$ con $p \in k[[X]]$ y $0 \neq \lambda \in k$ son unidades (si no lo sabe, demuéstrelo), probar que los todos los ideales de $k[[X]]$ son 0, y $\langle x^n\rangle$ con $n \in \mathbb{N}_0$.

13. Sea $M$ un $k[[X]]$-módulo (por lo tanto un $k[X]$-módulo).

   (a) Si $M$ es cíclico entonces $M = (M,\phi)$ con $M$ de dimensión finita y $\phi$ nilpotente, o bien $M \cong k[[X]]$.

   (b) Si $M$ es de dimensión finita entonces el endomorfismo 'multiplicar por $x$' es nilpotente en $M$.

14. (Ideales a izq. de matrices) Sea $k$ un cuerpo, consideremos el anillo $M_3(k)$ y $e \in M_3(k)$ la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    Ver lo siguiente:

   (a) $e^2 = e$, el ideal a derecha $e.M_3(k)$ consiste de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el ideal a izquierda $M_3(k).e$ consiste de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y el ideal bilátero generado por $e$ es $M_3(k)$.

   (b) Sea $I \subseteq A$ un ideal a izquierda, y sea $S_I$ el subespacio $e.I \subseteq \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces el ideal generado por $S_I$ (i.e. $M_3(k).S_I$) coincide exactamente con $I$.

(c) Los ideales a izquierda de $M_3(k)$ están en correspondencia 1-1 con los subespacios de $k^3$. Encuentre los ideales asociados a los subespacios generados respectivamente por $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ y $(1,0,0)$.

(d) Generalización 1: demuestre que los ideales a izquierda de $M_n(k)$ están en correspondencia biyectiva con los subespacios de $k^n$ (con $n \in \mathbb{N}$).
Generalización 2: si $A$ es un anillo cualquiera demuestre que los ideales a izquierda de $M_n(A)$ están en correspondencia biyectiva con los submódulos a izquierda de $A^n$.

15. Sea $k$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$, los únicos ideales biláteros de $M_n(k)$ son 0 y $M_n(k)$. Si $A$ es un anillo, los únicos ideales biláteros de $M_n(A)$ son de la forma $M_n(I)$ con $I \subseteq A$ un ideal bilátero (sug. si $e$ es una matriz tipo la del ejercicio anterior, entonces para $J \subseteq M_n(A)$, la asignación $J \mapsto e.J.e$ da una matriz 'concentrada' en el lugar 11 y establece una biyección entre ideales bilateros de $A$ y de $M_n(A)$). ¿puede haber un morfismo de anillos $M_n(k) \to k$?

16. Sea $M$ un $A$-módulo a derecha y $B = \mathrm{End}_A(M)$. Ver que la acción $\mathrm{End}_A(M) \times M \to M$, $(f,m) \mapsto f(m)$ define sobre $M$ estructura de $\mathrm{End}_A(M)$-módulo a izquierda, además $M$ resulta un $\mathrm{End}_A(M) - A$-bimódulo (i.e. las dos estructuras son compatibles. Si $M = A^{n\times 1}$ (o sea $A^n$ visto como 'vector columna') es un $A$-módulo a derecha, ver que $M$ además es un $M_n(A)$-módulo a izquierda con la multiplicación usual de matrices. Ver que esta estructura coincide con la definida antes, identificando $\mathrm{End}_A(A^n) \cong M_n(A)$.