ALGEBRA II

Práctica N°1

1. Sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$, con el producto usual $\cdot$ (*Grupo de raíces n-ésimas de la unidad*).
   (i) Probar que $(\mathbb{G}_n\,,\,\cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in \mathbb{G}_n$.
   (ii) Probar que $\mathbb{G}_n$ es cíclico, es decir, que existe $w \in \mathbb{G}_n$ que satisface:
   $$\forall\, z \in \mathbb{G}_n \ \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z = w^k.$$
   (iii) $\mathbb{G}_n \subseteq \mathbb{G}_m$ si y sólo si n/m.
   (iv) $\mathbb{G}_n \cap \mathbb{G}_m = \mathbb{G}_{(n:m)}$.

2. Sea $\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{Z} \ / \ 0 \leq k < n\}$, con la operación $*$ dada por $a * b = r_n(a+b)$. Probar que $(\mathbb{Z}_n, *)$ es un grupo y determinar si es abeliano.

3. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$, con el producto usual $\cdot$.
   (i) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.
   (ii) Determinar si S^1 es cíclico.

4. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determinar si es abeliano
   (i) $G = \mathbb{N}_0 \qquad a * b = [a, b]$
   (ii) $G = \mathbb{Q}_{>0} \qquad a * b = a \cdot b$
   (iii) $G = M_3(\mathbb{Z}) \qquad a * b = a \cdot b$
   (iv) $G = M_n(\mathbb{R}) \qquad a * b = a + b$
   (v) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, det\ a = 1\} \qquad a * b = a \cdot b$
   (vi) $G = End_K(V)$, con V un K-espacio vectorial $\qquad f * g = f \circ g$
   (vii) $G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \,/\, d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\} \qquad f * g = f \circ g$
   (viii) $S(X) = \{\sigma : X \to X,$ biyectivas$\}$ con la composición. (*Grupo de permutaciones de* X)
   <u>*Notación*</u>: Cuando $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $S(X)$ sera notado $\mathbb{S}_n$.
   (ix) $G = S(\mathbb{Z}) \qquad f * g = f \circ g^{-1}$
   (x) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad (a, b) * (c, d) = (r_2(a+c), r_2(b+d))$. Se nota $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
   (xi) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \,/\, (a, n) = 1\} \qquad a * b = r_n(a \cdot b)$

5. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos. (Sug: hacer las posibles tablas de operaciones).

6. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.

   (i) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.

   (ii) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ ó $H_2 \subset H_1$.

7. Consideremos el grupo $G = \{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T$ isomorfismo $\}$ con la composición. Sean $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, simetría con respecto al eje de las x y

   $\rho = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{n}) \\ \mathrm{sen}(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}$ rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

   Se define $D_n = \langle s, \rho \rangle$, el subgrupo de G generado por s y ρ. (*Grupo Dihedral*)

   (i) Probar que $s^2 = 1$, $\rho^n = 1$, $s \circ \rho^{-1} = \rho \circ s$.

   (ii) Probar que $D_n = \{I, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, s, \rho s, \rho^2 s, \ldots, \rho^{n-1} s\}$.

   (iii) Probar que $|D_n| = 2n$.

8. Hallar todos los subgrupos cíclicos de los grupos: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{G}_3, \mathbb{G}_4, \mathbb{S}_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

9. Sea G un grupo y sea $a \in G$. Probar que $C_a = \{x \in G;\ x \cdot a = a \cdot x\}$ es un subgrupo de G.

10. Probar que H es un subgrupo de $(G, *)$ en cada uno de los siguientes casos:

    (i) $G = \mathbb{C}^*$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = S^1$

    (ii) $G = GL(2, \mathbb{C})$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = \mathcal{H}$

    donde $\mathcal{H} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$
    ($\mathcal{H}$ es el *grupo de cuaterniones*)

    (iii) $G = D_4$ $\quad * = \circ \quad$ $H = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$

    (iv) $G = S^1$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = \mathbb{G}_n$

    (v) $G = \mathbb{Z}_{2n}$ $\quad a * b = r_{2n}(a + b) \quad$ $H = \{a \in G \ / \ a$ es par$\}$

    (vi) $G = GL(n, \mathbb{R})$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = SL(n, \mathbb{R})$

11. Encontrar todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$.

12. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = \mathbb{G}_n$.

13. Sea G un grupo infinito tal que $\forall\ H \subseteq G$ subgrupo se verifica que $H = 1$ ó $H \simeq G$. Probar que $G \simeq \mathbb{Z}$. ¿Qué puede decirse si G es finito?

14. Probar que todo grupo infinito tiene infinitos subgrupos distintos.

15. Dado un grupo G, definimos el *conmutador* de G:

$$[G, G] = \langle aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G \rangle.$$

Mostrar que G es abeliano si y sólo si $[G, G] = 1$.

16. Dado un grupo G, definimos el *centro* de G:

$$\mathcal{C}(G) = \{x \in G \ , \ \forall \ y \in G : yx = xy\}$$

Probar que $\mathcal{C}(G)$ es un subgrupo abeliano de G.

17. Calcular los centros y conmutadores de $\mathcal{H}$ y D_n.

18. Calcular el centro de $GL(n, \mathbb{R})$.

19. Hallar $ord(x)$ en los casos

(i) $G = S_8$ $\qquad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7)$

(ii) $G = \mathbb{Z}_{12}$ $\qquad x = 2, 3, 4$

(iii) $G = \mathcal{H}$ $\qquad x = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$

(iv) $G = S^1$ $\qquad x = cos\,\frac{2\pi}{n} + i\ sen\,\frac{2\pi}{n}$

(v) $G = D_4$ $\qquad x = \rho^2\, s$

(vi) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural

20. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Probar que $ord(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

21. (i) Hallar el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ y determinar todos los $x \in \mathbb{Z}_{12}$ tales que el subgrupo cíclico generado por x coincide con $\mathbb{Z}_{12}$.

(ii) Hallar el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ y de $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$.

(iii) Inspirándose en ii) probar que si G_1 y G_2 son grupos finitos, el orden de un elemento (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2.

22. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Probar que existe un elemento de orden p en G.

23. Verificar que son morfismos de grupos las siguientes aplicaciones. Determinar su núcleo e imagen.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $f(x) = e^{i2\pi x}$. Hallar $f(\mathbb{Q})$.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $f(x) = e^{ix}$. Probar que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ : f(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{G}_n = \{1\}$.

(iii) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = |x|$.

(iv) $\det : GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$.

24. Determinar si los siguientes pares de grupos son isomorfos:

   (i) $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
   (ii) $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{G}_n$
   (iii) $\mathbb{Z}_{10}$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$
   (iv) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

25. Dados: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8$, D_4 , $\mathbb{G}_8$, $\mathcal{H}$. Decidir cuáles son abelianos, cuáles cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

26. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de orden 2, 4 y 8.

27. (i) Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{G}_2$.
   (ii) Hallar $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_n, \mathbb{Z})$.
   (iii) Hallar $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z})$ para G grupo finito.

28. (i) Probar que son equivalentes:
      a. G abeliano.
      b. $f : G \to G$ / $x \mapsto x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
      c. $f : G \to G$ / $x \mapsto x^2$ es un morfismo de grupos.
   (ii) Probar que si $x^2 = 1 \;\; \forall x \in G$ entonces G es abeliano. ¿Es cierta la recíproca?

29. Probar que:

   (i) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq 0$.
   (ii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7) = 0$.
   (iii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.
   (iv) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
   (v) Hallar $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, +)$. Probar que $\mathrm{End}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \cup \{0\}$.

30. Hallar dos grupos G y H no isomorfos tales que $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(H)$.