ALGEBRA II

Práctica N°2

1. Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G. Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X,\, y \in Y\}$$

Si $x \in G$ escribimos $xH := \{x\}H$.

Probar la equivalencia de las siguientes condiciones sobre un subgrupo H de G.

(i) $(\forall x)\, xH = Hx$
(ii) $(\forall x)\, x^{-1}Hx \subset H$
(iii) $(\forall x)\, x^{-1}Hx = H$

Notar que cuando se verifica cualquiera de las condiciones anteriores H es un subgrupo normal.

2. Decidir cuáles de los subgrupos del ejercicio 10 de la práctica 1 son normales.

3. ¿Es $[G, G]$ un subgrupo normal de $(G, *)$ para todo grupo $(G, *)$?

4. Sea G un grupo y Hy K subgrupos.

(i) Si H ó K es normal entonces HK es subgrupo.
(ii) Si H y K son subgrupos normales entonces $HK = KH$ es un subgrupo normal de G.

5. Dados los siguientes subgrupos de S_4
$K = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}$
$H = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4)\}$
$U = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$

(i) Probar que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft A_4$ y $K \triangleleft S_4$
(ii) Probar que H no es normal en A_4 ni en S_4
(iii) Determinar si $U \triangleleft S_4$

6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \to G'$ un morfismo. Probar que

(i) $Nu(f) \triangleleft G$

(ii) Recíprocamente si H es un subgrupo normal de G, existen un grupo G' y un epimorfismo $f : G \longrightarrow G'$ tal que $Nu(f) = H$.

(iii) ¿Es cierto que $Im(f) \triangleleft G'$?

7. Sean G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \triangleleft G$.

8. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$

   (i) $G = \mathbb{R} \qquad S = \mathbb{Z}$

   (ii) $G = GL(n, k) \qquad S = SL(n, k)$, donde k es un cuerpo.

   (iii) $G = D_n \qquad S = \langle\, \rho \,\rangle$

   (iv) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = S^1$

   (v) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* i$

9. Sean G un grupo y $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

   (i) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).

   (ii) Probar que $Aut(G)$ es un grupo con la composición.

   (iii) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow Aut(G)$ $(a \mapsto I_a)$ es un morfismo de grupos. Probar que $Im(I)$ es un subgrupo normal de $Aut(G)$ (notaremos a este subgrupo $Int(G)$). Verificar que $Nu(I) = \mathcal{C}(G)$.

   (iv) Deducir que $G/_{\mathcal{C}(G)} \simeq Int(G)$.

10. Sean G un grupo y H un subgrupo. Probar que

    $[G; G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G$ y G/H es abeliano.

11. Calcular todos los cocientes de $\mathbb{S}_3$, D_4 y $\mathcal{H}$.

12. Probar que

    (i) $\mathbb{C}^*/_{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$

    (ii) $\mathbb{Z}/_{m \cdot \mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$

    (iii) $GL_n(\mathbb{C})/_{SL_n(\mathbb{C})} \simeq \mathbb{C}^*$

    (iv) $\mathbb{Q}^*/_{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq \mathbb{G}_2$

    (v) $S^1/_{\mathbb{G}_n} \simeq S^1$

    (vi) Si m/n entonces $\mathbb{G}_n/_{\mathbb{G}_m} \simeq \mathbb{G}_{\frac{n}{m}}$

13. (i) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un isomorfismo y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que

    a. $H' \triangleleft G'$

b. $G \,/\, H \simeq G' \,/\, H'$

(ii) Sean G y G' dos grupos isomorfos, $H \triangleleft G$ y $H' \triangleleft G'$ tales que $H \simeq H'$. ¿ Será cierto que $G \,/\, H \simeq G' \,/\, H'$

14. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y D_4.

15. Sean p primo y G un grupo de orden $2p$. Probar que G es abeliano o $G \simeq D_p$.

16. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

    (i) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{C}(G)$.
    (ii) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un elemento de orden k.
    (iii) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un subgrupo de orden k.
    (iv) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.
    (v) Si $p/|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.
    (vi) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.