ALGEARA II

Adicional Práctica N°3

1. Sea G un grupo abeliano finito. Probar que existe una sucesión ascendente finita de subgrupos de G,
$$1 = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_n = G$$
de tal manera que los cocientes $G_{i+1}/G_i \simeq \mathbb{Z}_{p_i}$ con p_i primo.

2. (i) Sea G un grupo. Probar que los siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a. G es resoluble.
   b. La sucesión descendente de subgrupos de G definida por inducción:
   $$G_0 := G$$
   $$G_{i+1} := [G_i, G_i]$$
   termina. (Es decir que existe un $n \in \mathbb{N}$ / $G_n = 1$)

   (ii) Si además G es finito las proposiciones anteriores son también equivalentes a:
   c. Existe una sucesión estrictamente ascendente finita de subgrupos de G, tal que $G_0 = 1$, $G_n = G$ y $G_{i+1}/G_i \simeq \mathbb{Z}_{p_i}$ con p_i primo.

3. Un grupo finito G de orden n, con la propiedad de que para todo divisor m de n existe un subgrupo normal de orden m se denomina *nilpotente*. Probar que:

   (i) G es nilpotente si y sólo si para cada primo p que divida al orden de G existe un único p-subgrupo de Sylow H_p de G si y sólo si $G \simeq \times H_p$. (ver ejercicio 22).
   (ii) Los grupos abelianos son nilpotentes.
   (iii) Los p-grupos son nilpotentes.
   (iv) Todo grupo nilpotente es resoluble.
   (v) Analizar la nilpotencia de $\mathbb{S}_n$ y A_n para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (vi) Si G posee un subgrupo normal H tal que H y G/H son nilpotentes, ¿es G nilpotente?

4. Sean p y q primos. Probar que todo grupo de orden p^2q es resoluble.

5. Analizar la resolubilidad de $GL(n, \mathbb{R})$, con $n \geqslant 3$. (Sug: Probar que $[GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{R})] = \langle I + \lambda e_{ij}, i \neq j, \lambda \in \mathbb{R} \rangle$)