ALGEARA II

Práctica N°3

<u>*Notación*</u>: Sean $(G, \cdot)$ y $(K, \circ)$ grupos, $f : K \to \mathrm{Aut}(G)$ morfismo. El conjunto $G \times K$ con la operación dada por $(g, k) * (g', k') = (g \cdot f(k)(g'), k \circ k')$ es un grupo que llamaremos *producto semidirecto* de G por K y se notará como $G \rtimes_f K$ o $G \rtimes K$ cuando el morfismo f quede sobreentendido. Si $f(k) = id \;\; \forall\, k \in K$ escribiremos $G \times K$ en vez de $G \rtimes_f K$. Si además G y K son abelianos la notación usual es $G \oplus K$.

1. $H \triangleleft G$, S subgrupo de G, $f : S \to \mathrm{Aut}(H)$ definida por: $f(s)(h) = shs^{-1}$. Probar que $g : H \rtimes_f S \to G \;/ (h, s) \mapsto h \cdot s$ es un morfismo de grupos y resulta un isomorfismo si y sólo si $H \cap S = 1$ y $G = H \cdot S$.

2. Sean G grupo abeliano, H subgrupo de G. Probar que H es sumando directo de G si y sólo si existe $\sigma : G \to H$ morfismo tal que $\forall\, x \in H \; : \; \sigma(x) = x$.

3. (i) Probar que $G \simeq H \oplus K$ si y sólo si existen H', K' subgrupos <u>normales</u> de G tales que:
   a. $H' \simeq H$ y $K' \simeq K$.
   b. $H' \cap K' = 1$.
   c. $H' \cdot K' = G$.

   (ii) ¿Podrías establecer condiciones semejantes para el caso $G \simeq H \rtimes_f K$?

4. Sea $r, n \in \mathbb{N}$ tal que r/n. Probar que $r \cdot \mathbb{Z}_n$ es sumando directo de $\mathbb{Z}_n$ si y sólo si $(r : \frac{n}{r}) = 1$.

5. Caracterizar los $n \in \mathbb{N}$ tales que los únicos sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$ son los triviales.

6. ¿Es cierto que todo grupo es isomorfo a un subgrupo normal de un grupo no comnutativo?¿Y si se agrega la condición de que no sea factor directo del grupo buscado?

7. Sea $T = \{f : K \to K \;/\; f(x) = ax + b, \;\; a \in K^* \;, \;\; b \in K\}$. Interptretar T como el producto semidirecto de K^* con K.

8. Sea $G \simeq H \rtimes_f K$ con H y K abelianos, ¿es G es abeliano? ¿y si $G \simeq H \oplus K$?

9. Escribir $\mathbb{S}_n$ y D_n ; $n \geq 3$ como productos semidirectos no triviales.

10. Probar que S es un factor semidirecto de G en los siguientes casos:

(i)	$G = \mathbb{C}^*$	$S = S^1$
(ii)	$G = \mathbb{G}_{12}$	$S = \mathbb{G}_3$
(iii)	$G = \mathbb{C}$	$S = \mathbb{R}$
(iv)	$G = GL(n, \mathbb{C})$	$S = SL(n, \mathbb{C})$

11. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X. En cada caso calcular ${}^{G}X$, las G-órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X.

    (i) $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$

    (ii) $G = \mathbb{R}^*$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

    (iii) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x, y) = (ax + by, cx + dy)$

12. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall\, a \in G$ y $x \in X$.

13. Sea X un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

14. Sean G un grupo y p un primo.

    (i) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{C}(G) \neq 1$.

    (ii) Probar que si $G/_{\mathcal{C}(G)}$ es cíclico entonces G es abeliano.

    (iii) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.

    (iv) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.

    (v) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/_{\mathcal{C}(G)}$ sea abeliano.

15. G es un p-grupo $\Leftrightarrow \forall H \triangleleft G$, H y G/H son p-grupos.

16. Sean G un grupo finito y H un subgrupo de indice n. Probar que existe un subgrupo $K \triangleleft G$, $K \subset H$, tal que $(G : K)/n!$. Deducir que si además G es simple, $|G|/n!$.

17. Sean G un grupo finito y H un subgrupo de indice p, con p el menor primo que divide a $|G|$. Probar que H es normal.

Notación: Sea G un grupo finito. H_p denotara a un p-subgrupo de Sylow de G.

18. *Teorema de Cauchy*: Sean G un grupo finito y p un primo tal que $p/|G|$. Probar que existe $x \in G$ tal que $ord(x) = p$. ¿Es cierto el resultado para p^k?

19. Calcular todos los p- subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_2\,,\mathbb{Z}_{12}\,,\mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}\,,\mathbb{S}_3 \oplus \mathbb{Z}_3\,,\mathbb{S}_3 \oplus \mathbb{S}_3$$

20. Sea G grupo finito, p primo que divide a $|G|$, H_p p-subgrupo de Sylow de G, $H \triangleleft G$. Probar que si $H_p \subseteq H$, $H_p \triangleleft H$ entonces $H_p \triangleleft G$.

21. Sean G y G' dos grupos cuyos p-grupos de Sylow son isomorfos para todo primo p ¿Vale que $G \simeq G'$?

22. $|G| < \infty$, $H_p \triangleleft G \; \forall p \implies G$ es el producto directo de los H_p.

23. Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{C}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{C}(G)|$.

24. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.

25. Sean p primo y $|G| = n$. Probar que existe k tal que $n = p^k \iff \forall x \in G$, $ord(x) = p^s$ para algún s (s depende de x).

26. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.

27. Meditar sobre el hecho de que si G tiene un único p-subgrupo de Sylow propio para algún p, entonces G no es simple.

28. Sean p, q primos , $|G| = p^2 q$. Probar que G no es simple.

29. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

    $30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075.$

30. $|G| = 17^2.19^2 \implies G$ abeliano.

31. $|G| = 255 \implies G$ cíclico.

32. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Probar que:

    (i) $H_p \cdot H_q$ es subgrupo de G.

    (ii) $H_p \cdot H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.

33. $|G| = p^3$. Supongamos que hay en G dos subgrupos normales de orden p diferentes. Probar que G es abeliano.