ALGEBRA II

Práctica N°4

1. Probar que los siguientes conjuntos, equipados con las operaciones definidas, son anillos, y determinar si son conmutativos, de división, íntegros.

   (i) $M_n(A)$, con la suma y el producto de matrices, A anillo.

   (ii) $A^X = \{f : X \to A\}$, A anillo, X conjunto, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

   (iii) $\prod_{i \in I} A_i$ donde $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de anillos, con la suma y el producto coordenada a coordenada.

   (iv) $R = (P(X), \Delta, \cap)$, donde X es un conjunto, $P(X)$ el conjunto de partes de X, Δ la diferencia simétrica y $\cap$ la intersección.

   (v) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ donde $d \in \mathbb{Z}$.

2. Dar ejemplos de

   (i) anillo de división que no sea cuerpo.

   (ii) anillo conmutativo que no sea íntegro.

   (iii) anillo íntegro que no sea de división.

3. Sea $C[0,1] \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$ el subanillo de funciones continuas. Determinar si es íntegro y caracterizar los elementos inversibles de $C[0,1]$.

4. Sea A un anillo. El *grupo de unidades* de A es el conjunto

   $$\mathcal{U}(A) = \{u \in A : u \text{ es inversible }\}$$

   (i) Probar que la multiplicación de A hace de $\mathcal{U}(A)$ un grupo.

   (ii) Probar que $\mathcal{U}_n := \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{m \in \mathbb{Z}_n : (m : n) = 1\}$. Deducir que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo $\iff$ n es primo.

   (iii) Para $n = 3, 4, 5, 6, 8$ determinar el orden de $\mathcal{U}_n$, y decidir si es o no cíclico o suma de cíclicos. ¿Es $\mathcal{U}_8 \cong \mathcal{U}_5$?.

   (iv) Sea G un grupo; probar que $G.1 \subset \mathcal{U}\mathbb{Z}[G]$, y que no vale la igualdad. Calcular $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$.

   Si A, B son anillos, denotamos $Hom(A, B)$ al conjunto de morfismos $A \to B$.

   (v) Probar que si A es un anillo y G un grupo, la aplicación $f \to f|G$ es una biyección

   $$Hom(\mathbb{Z}[G], A) \to Hom(G, \mathcal{U}(A))$$

(vi) Calcular $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[x]/ < x^n >)$ $(n \geq 2)$.

5. Probar que todo anillo contiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$. ¿Qué puede decirse de n si A es anillo de división? ¿y si es íntegro?

6. Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

   (i) Probar que en A la escritura es única, es decir que si $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

   (ii) Sea $N : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función (norma) definida por $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Probar que es multiplicativa.

   (iii) Probar que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad.

   (iv) Probar que $z \in A$ es una unidad si y sólo si $N(z) = 1$ ó $N(z) = -1$.

   (v) Hallar otras unidades de A.

7. Caracterizar el grupo de unidades de: $\mathbb{Z}$, K cuerpo, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $B[x]$ con B dominio íntegro.

8. Probar que todo anillo íntegro finito es un anillo de división.

9. Sean R un anillo, $n \geq 1$ y M_nR el anillo de matrices de $n \times n$ con coeficientes en R. Probar

   (i) Si $I \lhd R$ es un ideal bilátero entonces el conjunto

   $$M_n(I) := \{A \in R : A_{ij} \in I \quad \forall i, j\}$$

   es un ideal bilátero de M_nR.

   (ii) Si $J \lhd M_nR$ es un ideal bilátero entonces

   $$I := \{r \in R : (\exists A \in J, 1 \leq i, j \leq n) \;\; r = A_{ij}\}$$

   es un ideal bilátero de R y $J = M_nI$.

10. Sean k un cuerpo y $n \geq 1$. Probar

    (i) M_nk es *simple* (i.e. no tiene ideales biláteros no triviales).

    (ii) $\mathcal{C}(M_nk) = k \cdot I$.

11. Sean k un cuerpo, $f \in k[x]$, $A = k[x]/fk[x]$. Probar que A es un cuerpo $\iff$ f es irreducible.

12. Sean k un cuerpo, $\alpha, \beta \in k^*$, $\Delta = -\alpha\beta$ y A un k-espacio vectorial de dimensión 4 con base $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Probar que existe una única operación binaria $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ que satisface simultáneamente que $(A, +, \cdot, 0, v_0)$ es un anillo y que

$$\lambda a = (\lambda v_0) \cdot a = a \cdot (\lambda v_0) \qquad (\lambda \in k, x \in A)$$

$$v_1^2 = \alpha v_0, \quad v_2^2 = \beta v_0, \quad v_1 v_2 = -v_2 v_1 = v_3.$$

(ii) Sean $\sigma : A \to A$ y $q : A \to A$ las siguientes aplicaciones

$$\sigma(\sum_{i=0}^{3} \lambda_i v_i) = \lambda_0 v_0 - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i, \quad q(a) = a\sigma(a)$$

Probar que $q(A) \subset k v_0$

(iii) A es anillo de división $\iff$ $q(A) \subset k^* v_0$.

(iv) Sea $K \supset k$ un cuerpo. Se asume que existe $t \in K$ tal que $t^2 = \Delta$. Sea $B \subset M_2(K)$ el k-subespacio generado por las siguientes matrices:

$$I, \quad e_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{\alpha} \\ -t & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 e_2 = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Probar que B es un subanillo de $M_2 K$ y que la transformación lineal $f : A \to B$ definida por $f(v_0) = I$, $f(v_i) = e_i$ $(i = 1, 2)$, $f(e_1 e_2) = v_3$ es un isomorfismo de anillos.

(v) B es simple y $\mathcal{C}(B) = k \cdot I$. (Sug.: usar el ejercicio 10).

(vi) Si $\Delta \in k^{*2}$, $A \cong M_2 k$. Si $\Delta \notin k^{*2}$, $K = k[x]/(x^2 - \Delta)k[x]$ es un cuerpo, y $t = x + (x^2 - \Delta)k[x]$ satisface $t^2 = \Delta$.

13. Probar que un anillo conmutativo A es un cuerpo $\iff$ todo morfismo que sale de A es inyectivo. Exhibir un anillo no conmutativo A que no sea de división pero que sea tal que todo morfismo que sale de él es inyectivo.

14. Un ideal bilátero I de un anillo A se dice *primo* si $ab \in I \Rightarrow a \in I \;\; b \in I$. Probar que

(i) $I \triangleleft A$ es primo $\iff$ A/I es íntegro.

(ii) Si A es conmutativo y $M \subset A$ es ideal maximal entonces M es primo. Si A no es conmutativo pero M es maximal en el conjunto de todos los ideales biláteros de A, ¿es necesariamente M primo? ¿y si M es un ideal maximal a izquierda que además es ideal bilátero?

(iii) Si $A \subset B$ es un subanillo de un anillo B y $J \triangleleft B$ es ideal primo entonces $J \cap A$ es ideal primo de A.

(iv) Si $p \in \mathbb{Z}$ es primo entonces $p\mathbb{Z}[i] \triangleleft \mathbb{Z}[i]$ es primo $\iff$ -1 no es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$.

15. Sea A un anillo. Probar

$$\mathbb{Z}[x]/ < x^2 + 1 > \cong \mathbb{Z}[i], \quad A[x, y]/ < xy - 1 > \cong A[\mathbb{Z}] \quad A[x]/ < x^n - 1 > \cong A[\mathbb{Z}_n]$$

16. Caracterizar los siguientes cocientes

$$\mathbb{R}[x]/ < x^2 + 1 >, \quad \mathbb{Z}[i]/ < 1 + i >, \quad \mathbb{Z}[i]/ < 1 + 2i >$$

$$\mathbb{Z}[x]/ < 2, x >, \quad \mathbb{Z}[x]/ < 2x >, \quad \mathbb{Z}[x]/ < x^2 + x + 1 >$$

17. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = id$. Hallar todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.