1^{er} cuatrimestre 2002

ALGEARA II

Práctica N°5

A lo largo de esta práctica A-módulo significará A-módulo a izquierda.

1. Determinar si M es un A-módulo en cada uno de los siguientes casos:

   (i) $A = \mathbb{Z}_n$, $M = \mathbb{Z}_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \mid n$, con la suma usual de $\mathbb{Z}_m$ y la acción

   $$a.x = r_m(ax)$$

   (ii) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción

   $$a.\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.z_{11} & a.z_{21} \\ a.z_{12} & a.z_{22} \end{pmatrix}$$

   (iii) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de $\mathbb{R}^n$ y la acción

   $$f.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(1).x_1, f(0).x_2, \ldots, f(0).x_n)$$

   (iv) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de números enteros y la acción

   $$a.m = \det(a).m$$

2. Sea A un anillo y sean M y N A-módulos. Probar que $M \times N$ con las operaciones:

   $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad a \cdot (x, y) = (a \cdot x, a \cdot y)$$

   es un A-módulo, que será denotado $M \oplus N$

3. Sea K un cuerpo

   (i) Sea V un K-espacio vectorial y sea $u \in End_K(V)$. Probar que existe una única estructura de $K[X]$-módulo en V que satisface

   $$(kX^0).v = k.v$$
   $$X.v = u(v)$$

   (ii) Sea M un $K[X]$-módulo y sea $u : M \longrightarrow M$ la aplicación definida por $u(v) = X.v$ Probar que con la acción $k.v = (kX^0).v$ M es un K-espacio vectorial y $u \in End_K(M)$

4. Sean A y B anillos, sea M un B-módulo y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a._{\varphi}x = \varphi(a).x$ define una estructura de A-módulo sobre M

Sea M un A,módulo y sea S un subconjunto de M- Se llama **anulador** *de S al conjunto*

$$\mathrm{An}(S) = \{a \in A/a.s = 0 \quad \forall s \in S\}$$

Si $x \in M$, $\mathrm{An}(\{x\})$ será denotado $\mathrm{An}(x)$

Un A,módulo M se dice **fiel** *si $\mathrm{An}(M) = \{0\}$*

5. Probar que

   (i) $\mathrm{An}(S)$ es un ideal a izquierda de A

   (ii) $\mathrm{An}(S) = A$ si y sólo si $S \subseteq \{0\}$

6. Determinar si S es un submódulo del A-módulo M en cada uno de los siguientes casos:

   (i) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q})/a_{ii} = 0 \, \forall \, 1 \leq i \leq n\}$

   (ii) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})/det(a_{ij}) = 0\}$

   (iii) A un anillo cualquiera , $M = A^n$, $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n/x_1 + \cdots + x_n = 0\}$

   (iv) A un anillo cualquiera , $M = A[X]$, $S = \{f \in A[X]/f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$

7. Sean A un anillo y $m, n \in \mathbb{N}$. Probar que:

   (i) Si $a \in A^{m\times n}$ entonces la aplicación $f_a : A^m \longrightarrow A^n$ dada por $f_a(x) = x \cdot a$ es un morfismo de A-módulos.

   (ii) Si $f : A^m \longrightarrow A^n$ es un morfismo de A-módulo, entonces existe una única matriz $a \in A^{m\times n}$ tal que $f = f_a$.

8. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Probar que f es un morfismo de A-módulos, hallar su núcleo, su imagen y determinar si es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción o isomorfismo, en cada uno de los siguientes casos:

   (i) $f : M^n \longrightarrow M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$ $(n > 2)$

   (ii) $f : M^n \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$

   (iii) Si $n \leq m$, $f : M^n \longrightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots 0)$

   (iv) Si $n \leq m$, $f : M^m \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \ldots, x_n)$

   (v) Fijado $b \in A$, $\varepsilon : A[X] \longrightarrow A$, $\varepsilon(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i$

(vi) $f : M_n(A) \longrightarrow A^n$, $f(a) = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$ si $a = (a_{ij})$

(vii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$

9. Sean M, N y P A-módulos y sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow P$ dos aplicaciones. Probar que

   (i) Si f y g son morfismos de A-módulos entonces $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos

   (ii) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y g es un monomorfismo entonces f es un morfismo de A-módulos

   (iii) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y f es un epimorfismo entonces g es un morfismo de A-módulos

10. Si M y N son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))/x \in M\}$$

se llama el gráfico de f. Probar que si M y N son A-módulos entonces f es un morfismo de A-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$

11. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Caracterizar el módulo cociente $N \big/ S$ en cada uno de los siguientes casos:

   (i) $N = M^n$, $S = \{x \in N/x_1 + \cdots + x_n = 0\}$

   (ii) $N = M^n$ $(n > 2)$, $S = \{x \in N/x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$

   (iii) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X]/f(1) = 0\}$

   (iv) $N = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij} \in M_n(A)/a_{ii} = 0 \, \forall \, 1 \leq i \leq n\}$

   (v) $N = M^J$, $S = \{x \in N/x_i = 0 \, \forall \, i \in I\}$, donde I es un subconjunto fijo de J

12. (i) Probar que si $f, g : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ son morfismos de grupos entonces son equivalentes:

      a. $f(1) = g(1)$

      b. $f(m) = g(m) \, \forall \, m \in \mathbb{Z}$

      c. $f = g$

   (ii) Probar que si $f : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ es un morfismo de grupos tal que $f(1) = 1$ entonces $f = id_{\mathbb{Q}}$

   (iii) Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación. Probar que f es una transformación lineal de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales sii $f : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ es un morfismo de grupos

13. Sea A un anillo y sean M y N dos A-módulos. Probar que

   (i) $Hom_A(M,N)$ con la suma definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ es un grupo abeliano

   (ii) Si A es conmutativo, la acción $(a.f)(x) = a.f(x)$ define sobre el grupo abeliano $Hom_A(M,N)$ una estructura de A-módulo. Para A no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $Hom_A(M,N)$ una estructura de $\mathcal{C}(A)$-módulo

14. Sea A un anillo. Dado un A-módulo M se llama *dual* de M a $M^* = Hom_A(M,A)$ con la suma usual y con la acción *a derecha* dada por $(f \cdot a)(x) = f(x) \cdot a$. Probar que la aplicación $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ definida por

$$\psi(x)(f) = f(x) \qquad (x \in M\,,\ f \in M^*)$$

   es un morfismo de A-módulos y que $Ker(\psi) = \bigcap_{f \in M^*} Ker(f)$

15. Sea M un A-módulo. Probar que $Hom_A(A,M) \simeq M$ como $\mathcal{C}(A)$-módulos

16. Probar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}\,,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$

Un A,módulo M se dice **simple** *si $M \neq \{0\}$ y sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M-*

17. Probar que un A-módulo M es simple si y sólo si $M \neq \{0\}$ y $A.x = M\ \forall\, x \in M$ tal que $x \neq 0$

18. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Probar que

   (i) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo

   (ii) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo

   (iii) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo

19. Sea M un A-módulo. Probar que $End_A(M) = Hom_A(M,M)$ con la suma definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y la composición de funciones es un anillo y que, cuando M es simple, $End_A(M)$ es un anillo de división.

20. Sea $A = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^i}$ con p primo. Sea $B = \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N} / p^n x = 0\}$. Probar que $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^i} \subset B$.¿Es estricta la inclusión? Probar que $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^i}$ no es sumando directo de A.

21. Probar:

   (i) $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn} \Longleftrightarrow (m:n) = 1$

(ii) Sea $\{G_i\}_{1\le i\le n}$ una familia de grupos cíclicos finitos. Si sus órdenes son coprimos dos a dos entonces $\bigoplus_{1\le i\le n} G_i$ es un grupo cíclico finito.

22. Establecer los siguientes isomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos:

    (i) $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

    (ii) $\mathbb{C}^* \simeq S^1 \oplus \mathbb{R}_{>0}$

    (iii) $\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{R}_{>0}$

    (iv) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ donde $d \in \mathbb{Z}$ es libre de cuadrados.

23. Probar que no existen epimorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos en los siguientes casos:

    (i) $\mathbb{G}_{p^\infty} \to \mathbb{G}_{p^\infty} \oplus \mathbb{G}_p$

    (ii) $\mathbb{Z}_{n^2} \to \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$

    (iii) $\mathbb{Q} \to \mathbb{G}_{p^\infty} \oplus \mathbb{G}_{p^\infty}$

    (iv) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_n$

24. Sea p primo. Probar que no existen secciones en los siguientes casos:

    (i) $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

    (ii) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

    (iii) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

25. Calcular:

    (i) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}_p)$

    (ii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^*; \mathbb{Z})$

    (iii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^*; \mathbb{Q}_{>0})$

    (iv) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p \ ; \ \mathbb{G}_3)$

    (v) $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^*; \mathbb{Q}^*)$

26. Sea M un A-módulo. Verificar que $N \simeq S \oplus T$ en cada uno de los siguientes casos:

    (i) $N = M^{n\times n}$, $S = \{x \in N \ / \ x^t = x\}$, $T = \{x \in N \ / \ x^t = -x\}$ $(2 \in \mathcal{U}(A))$

    (ii) $N = M^I$, $S_{i_0} = \{x \in N \ / \ x_{i_0} = 0\}$ $(i_0 \in I)$, $T_{i_0} = \{x \in N \ / \ x_i = 0 \ \forall i_0 \neq i \in I\}$

    (iii) $N = A[X]$, $S_a = \{p \in N \ / \ p(a) = 0\}$ $(a \in A)$, $T = A_0[X]$

    (iv) $N = M[X]$, $S_n = \{p \in N \ / \ p_i = 0 \ \forall \ 0 \le i \le n\}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $T_n = M_n[X]$

27. Probar que $A[X] \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} AX^n$

28. Sea M un A-módulo, y sean S y T submódulos de M tales que $S \subset T$. Probar que:

(i) Si S es sumando directo de M, entonces S es sumando directo de T.

(ii) Si S sumando directo de T y T es sumando directo de M, entonces S es sumando directo de M.

29. Dado un epimorfismo de A-módulos $f : M \to N$, sea S un submódulo de N. Si $f^{-1}(S)$ es sumando directo de M, entonces es S es sumando directo de N.

30. Sea p un número primo, $u : \mathbb{G}_{p^\infty}^2 \to \mathbb{G}_{p^\infty}^2$ la aplicación que $u(x, y) = (x, y \cdot x^p)$, $H = \{(x, 1) : \ x \in \mathbb{G}_{p^\infty}\}$

(i) u es un automorfismo de $\mathbb{G}_{p^\infty}^2$.

(ii) H y $u(H)$ son sumandos directos de $\mathbb{G}_{p^\infty}^2$.

(iii) $H \cap u(H)$ no es un sumando directo de $\mathbb{G}_{p^\infty}^2$

31. Exhibir sumandos directos G y F de $\mathbb{Z}^2$ tales que $G + F$ no sea sumando directo.

32. Probar que $\mathbb{Z}^2 \simeq \langle (m, n) \rangle \oplus \langle (r, s) \rangle$ sii $|ms - nr| = 1$. Luego, $\langle (m, n) \rangle$ es sumando directo de $\mathbb{Z}^2$ sii $(m : n) = 1$.