ALGEBRA II

Práctica N°6

Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sea $\mathcal{S}$ un sistema de generadores de M. Decimos que $\mathcal{S}$ es un *sistema de generadores minimal* de M si ningún subconjunto propio de $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M.

Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Diremos que M es *localmente cíclico* si todo submdulo de M de tipo finito es cíclico

1. Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son finitamente generados

2. Sea M un A-módulo no nulo finitamente generado. Probar que si $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$ tales que $M =< x_1, \ldots, x_n >$.

3. Probar que

   (i) Todo A-módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.

   (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en $\mathbb{Z}$ (considerando a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo) un sistema de generadores minimal con n elementos.

4. Probar que

   (i) Todo submdulo de un mdulo localmente cíclico es localmente cíclico

   (ii) Si M es localmente cíclico y $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo de A-módulo entonces N es localmente cíclico

   (iii) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) localmente cíclicos pero no son de tipo finito.

5. Sea k un cuerpo y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} k[x_1, \ldots, x_n]$. Probar que el ideal $I := \langle x_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ no es finitamente generado como A-mdulo.

6. Sea A un anillo. Probar que si A es local entonces ${}_AA$ es indescomponible

7. Sea K un cuerpo, $A = K[X]/\langle X^n \rangle$. Probar que A es un A-módulo *indescomponible* pero que no es un A-módulo simple.

Módulos libres

Un A-módulo M se dice *libre* sii existe un conjunto I tal que $M \simeq A^{(I)}$.

8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   (i) De todo sistema de generadores de M puede extraerse una base.

   (ii) Todo conjunto linealmente independiente en M puede extenderse a una base.

   (iii) Todo módulo es libre.

   (iv) Todo submódulo de un módulo libre es libre.

   (v) Si $x \in M$ es no nulo entonces $\{ x \}$ es linealmente independiente.

   (vi) Existen módulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes.

   (vii) Existen módulos no libres tales que todo elemento no nulo es linealmente independiente.

   (viii) Si A es un anillo íntegro y M es un A-módulo libre entonces todo elemento no nulo de M es linealmente independiente.

9. Probar que:

   (i) L A-módulo libre $\Longleftrightarrow$ L admite una base.
   (*base*: sistema de generadores linealmente independiente)

   (ii) L A-módulo libre, $x \in L$ no nulo $\Longrightarrow \forall\ a \in \mathrm{An}(x)\ :\ \exists\ b \in A^*$ tal que $ab = 0$. En particular, si A es íntegro, todo elemento no nulo de L es linealmente independiente.

   (iii) Existen módulos libres con submódulos libres que no son sumandos directos.

10. (i) Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia infinita de A-módulos no nulos y S un sistema de generadores de $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Probar que $\sharp S \geq \sharp I$.

    (ii) Sea L un A-módulo con una base infinita B. Probar que para todo sistema de generadores S resulta $\sharp S \geq \sharp B$; y para toda base B' de L se verifica que $\sharp B = \sharp B'$. En particular toda base de L es infinita. ($\sharp A$ = cardinal de A)

    (iii) Existen módulos libres que admiten bases finitas no coordinables.
    Ejemplo: Sea $B = \mathrm{End}_A(A^{(\mathbb{N})})$. Definimos $u, v \in B$ por:

$$\begin{array}{ll} u(e_{2i+1}) = 0 & u(e_{2i}) = e_i \\ v(e_{2i+1}) = e_i & u(e_{2i}) = 0 \end{array}$$

    Probar que $\{u, v\}$ es una base de B como B-módulo.

11. Sea D un anillo de división, y sea V un D-espacio vectorial.

    (i) *Lema de agregado:* Sea B un conjunto de elementos linealmente independientes de V, y $x \in V$ que no es combinación lineal de estos. Probar que $B \cup \{x\}$ es linealmente independiente.

(ii) *Lema de intercambio:* Sea B un conjunto de elementos linealmente independientes de V y G un sistema de generadores de V. Probar que $\forall\, b \in B \;:\; \exists\, g \in G \;/\; (B - \{x\}) \cup \{g\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(iii) Deducir que dos bases cualesquiera de V son coordinables.

12. (**Optativo**)

    Un anillo A tiene *noción de rango* si se verifica que $A^{(I)} \simeq A^{(J)} \Longrightarrow \sharp I = \sharp J$.

    Probar que todo anillo conmutativo tiene noción de rango.

    (*Sugerencia*: Para el caso finito, considerar un morfismo de anillos $\varphi : A \to K$ para algn cuerpo K y "extender" el isomorfismo $A^n \simeq A^m$ a $K^n \simeq K^m$.)

Módulos proyectivos

Un A-módulo P se dice *proyectivo* si para todo morfismo $f : P \to M$ y todo epimorfismo $g : N \to M$ existe un morfismo $h : P \to N$ tal que $g \circ h = f$.

13. Dado un A-módulo P. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

    (i) P es proyectivo.

    (ii) Todo epimorfismo $\pi : M \to P$ es una retraccin.

    (iii) P es (isomorfo a un) sumando directo de un A-módulo libre.

    (iv) Existen una familia $\{x_i\}_{i \in I} \subset P$ y una familia de formas lineales $\{f_i\}_{i \in I} \subset \mathrm{Hom}_A(P, A)$ tales que $\forall x \in P$ la familia $\{f_i(x)\}_{i \in I} \subset A$ tiene soporte finito y $x = \sum_{i \in I} f_i(x).x_i$

14. (i) Probar que todo módulo libre es proyectivo.

    (ii) Dar ejemplos de módulos proyectivos que no sean libres.

15. Sea M un A-módulo, P un A-módulo proyectivo y $S \subset P$ un submódulo maximal.
    Probar que $\mathrm{Hom}_A(M, P/S) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M) \neq 0$.

16. (i) Un A-módulo P es proyectivo de tipo finito sii es isomorfo a un sumando directo de un A-módulo libre de tipo finito.

    (ii) Si A es un anillo conmutativo y P y P' son A-módulos proyectivos de tipo finito, entonces $\mathrm{Hom}_A(P, P')$ es un A-módulo proyectivo de tipo finito.