ALGEBRA II

Práctica N°8

1. Dar un ejemplo de dominio íntegro que no sea dominio principal.

2. Probar que si K es un cuerpo entonces $K[X]$ es un dominio principal. Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

3. Sea A dominio ntegro local, $\mathcal{M}$ su ideal maximal y supongamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^n = 0$.

   Probar que A es principal sii su ideal maximal es principal.

   (En ese caso se dice que A es un *anillo de valuacin discreta* AVD)

4. Probar que los siguientes anillos son AVD:

   (i) Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo. $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, p$ no divide a $b\}$.

   (ii) Sea k cuerpo, $f \in k[X]$ irreducible. $k[X]_f = \{\frac{p}{q} : p, q \in k[X], q \neq 0, f$ no divide a $q\}$.

5. Sea A dominio principal, $p \in A$ primo, M A-mdulo p-primario y $a \in A$ tal que p no divide a a. Sea $\eta_a : M \to M$, $\eta_a(m) = am$. Probar que η_a es un isomorfismo de A-mdulos,

6. Sea G un p-grupo abeliano finito, $a \in \mathbb{Z}$ coprimo con p y $\eta_a : G \to G$ como en el ejercicio anterior. Probar que la aplicacin de $\mathbb{Z}_{(p)} \times G$ en G, $(\frac{a}{b}, g) \mapsto \eta_b^{-1}(ag)$, esta bien definida y da en G una estructura de $\mathbb{Z}_{(p)}$-mdulo.

7. Sea A un dominio principal. Probar que:

   (i) $\mathcal{P}$ es un ideal primo sii $\mathcal{P}$ está generado por un elemento primo.

   (ii) $\mathcal{M}$ es un ideal maximal sii $\mathcal{M}$ está generado por un elemento irreducible.

   (iii) p elemento primo sii p es un elemento irreducible.

8. Sea A un dominio ntegro. Sea M, N un A-mdulos. $\tau(M \oplus N) = \tau(M) \oplus \tau(N)$.

9. Sea A un dominio ntegro. Sean $M = S \oplus T$ un A-mdulo tal que T es de torisin y S es sin torsin. Probar que $\tau(M) = 0 \oplus T$ y $S \simeq M/\tau(M)$.

10. Sea A un dominio principal, y sea p un irreducible de A. Dado $a \in A, a \neq 0$, probar que $(A/\langle a\rangle)[p] \simeq A/\langle p^n\rangle$ donde $n = \max\{k \in \mathbb{N}_0$ tal que $p^k/a\}$.

11. Sea A un dominio principal, y sea M un A-módulo.

    (i) Sea $p \in A$ un elemento irreducible. M es un módulo cíclico p-primario sii existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $M \simeq A/\langle p^n\rangle$.

    (ii) M es simple sii existe un irreducible $p \in A$ tal que $A/\langle p\rangle$.

    (iii) M simple $\Longrightarrow$ existe un irreducible de $p \in A$ tal que M es un módulo p-primario.

12. Sea A un dominio principal. P una representación de irreducibles de A. Probar que:

    (i) M es un A-módulo de tipo finito y de torsión $\Longrightarrow M[p] = 0$ para casi todo $p \in P$.

    (ii) Sea $p \in P$ y sean $f : M \to N$ y $g : N \to M$ morfismos de A-módulos tales que $g \circ f = \eta_a$, para cierto $a \in A$. Probar que si p no divide a a entonces $\mathrm{Im}(M[p])$ es un sumando directo de $N[p]$.

    (iii) Si A no es un cuerpo, M es un A-módulo sin torsión sii $\mathrm{Hom}_A(S, M) = 0 \ \forall \ S$ A-módulo simple.

13. Sean p y q primos distintos en $\mathbb{Z}$. Si $c \in \mathbb{Z}$ y q/c, probar que no existen epimorfismos de $\mathbb{Z}_{(p)}$ en $\mathbb{Z}/\langle c \rangle$.

14. Sea A un dominio principal. Si M y N son A-módulos divisibles de torsión y P es una representación de irreducibles de A, entonces $M \simeq N$ sii $\{x \in M \ / \ p.x = 0\} \simeq \{x \in N \ / \ p.x = 0\}$ para todo $p \in P$.

15. Sea A un dominio principal, y sea M un A-módulo de tipo finito.

    (i) M es de torsión sii $\mathrm{Hom}_A(M, A) = 0$.

    (ii) M es indescomponible sii $\exists n \in \mathbb{N}, \ p \in A$, irreducible tales que $M \simeq A/\langle p^n \rangle$ ó $M \simeq A$.

16. Sea A un dominio principal, y sea M un A-módulo.

    (i) Si M es de tipo finito y S es un submódulo de M tal que M/S es sin trosión, entonces M es libre sii S es libre.

    (ii) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión, para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Analogamente, si G es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, entonces $G \simeq \mathbb{Z}$.

17. Determinar los coeficientes de estructura de los siguientes grupos:

    (i) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$

    (ii) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}$.

    (iii) $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

    (iv) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{49}$

    (v) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{45}$.

    (vi) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

18. Determinar los coeficientes de estructura del grupo G en cada uno de los siguientes casos:

    (i) G es el grupo con generadores $(x_i)_{1 \leq i \leq 3}$ que satisfacen las relaciones $3x_1 = -x_3$ y $3x_1 = 3x_3 - 8x_2$.

    (ii) G es el grupo con generadores $(x_i)_{1 \leq i \leq 3}$ que satisfacen las relaciones $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ y $3x_1 = 6x_3$.

    (iii) G es el grupo con generadores $(x_i)_{1 \leq i \leq 4}$ que satisfacen las relaciones $2x_1 + x_3 = -3x_2$, $x_1 = 3x_4, \ x_4 - x_2 = 5x_3, \ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$.

(iv) G es el grupo con generadores $(x_i)_{1\leq i\leq 4}$ que satisfacen las relaciones $2x_1 = x_2$.
(v) G es el grupo con generadores $(x_i)_{1\leq i\leq 3}$ que satisfacen las relaciones $3x_1 = x_2$ y $x_2 = 3x_3$.

19. Sea G un grupo de orden n.
    (i) Si $d \in \mathbb{N}$ es un divisor de n, G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d. Si d es primo, G posee elementos de orden d.
    (ii) Si $x \in G$ es un elemento tal que $\operatorname{ord}(x) = \exp(G)$, $\langle x\rangle$ es un sumando directo de G.
    (iii) Si n es libre de cuadrados, entonces G es cíclico.

20. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes $\mathbb{Z}$-módulos:
    (i) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 \ / \ m_1+m_2+m_3+m_4 = 0,\ 2m_1 - m_3 = 0,\ m_1+m_2-2m_3 = 0\}$
    (ii) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1$ es par, $m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$
    (iii) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1 = m_2 + m_3$ es par, $3/m_2\}$.
    Probar que S no es sumando directo de $\mathbb{Z}^3$.
    (iv) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12}) \oplus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{60})$
    (v) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{8}) \oplus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{30})$

21. Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la aplucación $n \mapsto \sharp\{x \in \mathbb{N}^r \ / \ \sum_{i=1}^{r} x_i = n$ y $x_i \leq x_j$ si $i < j,\ r \in \mathbb{N}\}$.
    (i) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$ Probar que el número de clases de isomorfismo de grupos de orden n es $\prod_{i=1} \pi(n_i)$.
    (ii) Determinar el número de clases de isomorfismo de grupos de orden n, para $1 \leq n \leq 16$. Exhibir explícitamente sus tipos.
    (iii) Determinar el número de clases de isomorfismo de grupos de orden n y escribir los tipos correspondientes, cuando n tiene factorización:
        a. $n = p^2q^4$.
        b. $n = p^3q^5r^4$.
        c. $n = p^6q^3r$.
        d. $n = p^2q^4r^5$.
        e. $n = p^2qr^3s^4$.
    (iv) Generalizar a módulos de trosión finitamente generados sobre un dominio principal.

22. Caracterizar los grupos abelianos G finitamnente generados tales que:
    (i) Todo subgrupo propio de G es cíclico.
    (ii) Todo subgrupo propio de G es maximal.
    (iii) Todo subgrupo propio de G es simple.
    (iv) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.
    (v) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.
    (vi) $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{Z}_p) = 0$
    (vii) $G^2 \simeq G \oplus \mathbb{Z}$.