ALGEBRA II - Práctica N°3 - Segunda Parte - Primer cuatrimestre de 2003

Teoremas de Sylow

Ejercicio 1. Sean G y G' grupos finitos tal que para todo p primo, sus respectivos p-subgrupos de Sylow son isomorfos. ¿Vale que $G \simeq G'$?

Ejercicio 2. Determinar todos los subgrupos de Sylow de $S_3 \times \mathbb{Z}_3$, de $S_3 \times S_3$, de A_5 y de D_n.

Ejercicio 3.

i) Sea G un grupo simple de orden 168. Calcular la cantidad de elementos de orden 7 que hay en G.

ii) Sea G un grupo no abeliano de orden 39. Calcular la cantidad de elementos de orden 3 y la cantidad de elementos de orden 13 que hay en G. ¿Y si G es abeliano?

iii) Sea G un grupo no abeliano de orden 21. Para todo p primo, calcular la cantidad de p-subgrupos de Sylow de G.

Ejercicio 4. Sea G un grupo finito tal que para todo primo p existe un p-subgrupo de Sylow invariante en G. Probar que G es el producto de todos sus subgrupos de Sylow.

Ejercicio 5.

i) Probar que todo grupo de orden $17^2.19^2$ es abeliano.

ii) Probar que todo grupo de orden 255 es cíclico.

iii) Probar que todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.

Ejercicio 6. Sea $G = SL_2(\mathbb{Z}_3)$.

i) Encontrar todos los subgrupos de Sylow de G.

ii) Probar que G tiene un subgrupo invariante isomorfo a $\mathcal{H}$.

Ejercicio 7.

i) Sea p primo y sea G un grupo de orden p^3 con dos subgrupos normales distintos de orden p. Probar que G es abeliano y no cíclico.

ii) Sea G un grupo de orden 27.5. Probar que si G posee más de un subgrupo invariante de orden 3 entonces G es abeliano y no cíclico.

Ejercicio 8.

i) Probar que existen grupos no abelianos de orden 3.7.11.

ii) Sea G un grupo no abeliano de orden 3.7.11. Probar que $[G, G]$ es cíclico y calcular su orden.

Ejercicio 9. Probar que hay exactamente 4 grupos no isomorfos de orden 30.

Ejercicio 10. Sean p y q primos impares tales que $p < q < 2p$. Caracterizar todos los grupos de orden $p^2.q$.

Ejercicio 11. Probar que no existen grupos simples de orden:

i) p^n, con p primo y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

ii) $p.q$, con p y q primos distintos.

iii) $p^2.q$, con p y q primos distintos.

iv) $p^2.q^j$, con p y q primos distintos tales que $p < q$ y $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$.

v) $p^3.q$, con p y q primos distintos.

Ejercicio 12. Sea G un grupo de orden n. Si p es un número primo, r_p notará la cantidad de p-subgrupos de Sylow de G.

i) Sea p un primo tal que $p|n$. Probar que si H es un p-subgrupo de Sylow de G entonces $[G : N(H, G)] = r_p$.

ii) Probar que si existe un subgrupo H de G no trivial tal que $m = [G : N(H, G)]$ satisface $m! < n$ entonces G no es simple.

iii) Probar que si n no es primo y para algún primo p tal que $p|n$ se verifica $r_p! < n$ entonces G no es simple.

Ejercicio 13. Caracterizar todos los grupos simples G tales que $|G| \leq 50$.

Ejercicio 14. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

56, 96, 200, 204, 260, 2540.

Ejercicio 15.

i) Sea p un primo y sea G un grupo tal que p divide al orden de G. Sea S_p un p-subgrupo de Sylow de G y $H \lhd G$ tal que $S_p \lhd H$. Probar que $S_p \lhd G$.

ii) Sea G un grupo finito y sean $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean S_p y S_q subgrupos de Sylow de G con $S_p \lhd G$. Probar

a) $S_p.S_q$ es subgrupo de G

b) $S_p.S_q \lhd G \Rightarrow S_q \lhd G$.

Ejercicio 16. (Optativo) Probar que hay exactamente 5 grupos no isomorfos de orden 20.

Ejercicio 17. (Optativo) Probar que hay exactamente 5 grupos no isomorfos de orden 18.

Optativo no significa difícil sino que requiere muchas cuentas.