ALGEBRA II - Práctica N°4 - Segunda Parte - Primer cuatrimestre de 2003

Anillos: continuación.

Ejercicio 1. Sea A un anillo conmutativo y sea $I \subset A$ un ideal propio. Probar que existe un ideal maximal $M \subset A$ tal que $I \subseteq M$.

Ejercicio 2. Probar que los siguientes anillos son prefactoriales pero no son dominios de factorización única:

i) $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$

iii) $A = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X] \ / \ a_1 = 0\}$ con la suma y el producto usual de polinomios.

En cada caso, encontrar un ideal del anillo que no sea principal.

Definición: Sea A un dominio íntegro y sean a y b elementos no nulos de A. Se llama un **máximo común divisor** entre a y b a un elemento d que cumple las siguientes condiciones:

i) $d|a$ y $d|b$

ii) Si $c|a$ y $c|b \Rightarrow c|d$

Si un máximo común divisor entre a y b es una unidad, a y b se dicen coprimos.

Ejercicio 3.

i) Si d y d' son dos máximos comunes divisores entre a y b, entonces d y d' son asociados.

ii) Sea A un dominio de factorización única. Entonces, si $a, b \in A - \{0\}$, existe un máximo común divisor entre a y b.

iii) Probar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no existe un máximo común divisor entre 6 y $2.(1 + \sqrt{-5})$.

iv) ¿Es cierto que en un dominio de factorización única, si d es un máximo común divisor entre a y b, entonces los ideales $< a \ , \ b >$ y $< d >$ coinciden?

v) Sean a, b y c elementos de un dominio de factorización única. Probar:

a) Si $a|b.c$ y a y b son coprimos, entonces $a|c$.

b) Si a y b son coprimos, $a|c$ y $b|c$, entonces $a.b|c$.

Ejercicio 4. Probar que los siguientes ideales son primos en $\mathbb{Z}[X]$:

i) $< f >$ con $f \in \mathbb{Z}[X]$ irreducible.

ii) $< p, f >$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo y $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\overline{f}$ en $\mathbb{Z}_p[X]$ es irreducible.

Probar que todos los ideales primos de $\mathbb{Z}[X]$ son de alguna de estas dos formas.

Ejercicio 5. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es euclideano para $d = -2, 2$ y 3.

Ejercicio 6.

i) Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo, se considera el anillo $\mathbb{Z}_{<p>} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ / \ (b : p) = 1\}$. Caracterizar todos sus ideales. Deducir que $\mathbb{Z}_{<p>}$ es un dominio principal que tiene un solo ideal maximal. Calcular la cantidad de elementos primos distintos no asociados entre sí de $\mathbb{Z}_{<p>}$.

ii) Dado $n \in \mathbb{N}$, encontrar un dominio de factorización única que tenga exactamente n elementos primos no asociados distintos.

Ejercicio 7.

i) Factorizar $16 + 11\sqrt{2}$ como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

ii) Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo. Probar que p es reducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ si y sólo si -2 es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$. Factorizar 19 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Ejercicio 8. Sea R un dominio euclideano. Probar que dada $A \in R^{n \times n}$, existen matrices inversibles B y C en $R^{n \times n}$ tales que $B.A.C$ es diagonal.

Ejercicio 9. Sea A un anillo conmutativo noetheriano. Probar que para todo ideal $I \subset A$, A/I es noetheriano. Deducir que cualquier cociente de un dominio noetheriano es un anillo prefactorial.