ALGEBRA II - Práctica N°5 - Primer cuatrimestre de 2003

Módulos.

A lo largo de esta práctica A-módulo significará A-módulo a izquierda.

Ejercicio 1.

i) Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sea X un conjunto no vacío. Probar que $M^X = \{f : X \to M\}$ y $M^{(X)} = \{f : X \to M \ / \ f(x) = 0$ salvo para finitos valores de $x\}$ son A-módulos.

ii) Sea G un grupo abeliano y sea $End(G)$ el anillo de endomorfismos de G. Probar que G es un $End(G)$-módulo con la acción definida por $f.x = f(x)$.

iii) Sea A un anillo. Probar que el conjunto A^n es un $A^{n\times n}$-módulo con la multiplicación de matrices por vectores.

Ejercicio 2. Sea A un anillo y sean M y N A-módulos. Probar que $M \times N$ con la suma y la acción coordenada a coordenada es un A-módulo, que se nota $M \oplus N$.

Ejercicio 3. Sean A y B anillos, sea M un B-módulo y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a._{\varphi} x = \varphi(a).x$ define una estructura de A-módulo sobre M.

Ejercicio 4. Sea M un A-módulo y sea S un subconjunto de M. Se llama *anulador* de S al conjunto

$$Ann(S) = \{a \in A / a.s = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $Ann(\{x\})$ se nota $Ann(x)$. Probar que

i) $Ann(S)$ es un ideal a izquierda de A. Si S es un submódulo de M, $Ann(S)$ resulta un ideal bilátero.

ii) Si $S \subseteq T$ entonces $Ann(T) \subseteq Ann(S)$.

iii) $Ann(S) = \bigcap_{s\in S} Ann(s)$.

iv) Si $J \neq \emptyset$ entonces $Ann(M^J) = Ann(M^{(J)}) = Ann(M)$.

v) Si $I \subseteq Ann(M)$ es un ideal bilátero, entonces M es un A/I-módulo con la acción definida por $\overline{a}.m = a.m$.

Ejercicio 5. Sea M un A-módulo y sean S un subconjunto de M y N un submódulo de M. Se llama *transportador* de S en N al conjunto

$$(N : S) = \{a \in A / a.s \in N \quad \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ se nota $(N : x)$.

a) Probar que:

   i) $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A.

   ii) $(0 : S) = Ann(S)$ y $(N : S) = A$ si y sólo si $S \subseteq N$.

   iii) Si $S \subseteq T$ entonces $(N : T) \subseteq (N : S)$.

   iv) Si P es un submódulo de M tal que $N \subseteq P$ entonces $(N : S) \subseteq (P : S)$.

   v) $(N : x).x = N \cap A.x$.

   vi) Si $J \neq \emptyset$ entonces $(N^J : M^J) = (N^{(J)} : M^{(J)}) = (N : M)$.

b) Hallar $(m\mathbb{Z} : n)$ para $m, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6.

i) Sea A un anillo y sea $B \in \mathcal{C}(A)^{m\times n}$. Probar que el conjunto $\{x \in A^n \ / \ B.x = 0\}$ es un submódulo de A^n. Encontrar un ejemplo de submódulo de A^n que **no** sea de esta forma.

ii) Sea A un anillo, I un ideal a izquierda de A y M un A-módulo. Probar que $I.M = \{\sum_{i=1}^{r} a_i.m_i \ / \ a_i \in I; m_i \in M \ \forall i\}$ es un submódulo de M. Probar que, dado $x \in M$, $I.x = \{a.x \ / \ a \in I\}$ es un submódulo de M.

Ejercicio 7. Probar en cada uno de los siguientes casos que f es un morfismo de módulos. Hallar su núcleo, su imagen y determinar si es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción o isomorfismo

i) Si $n < m$, $f : M^n \longrightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots 0)$ con M un A-módulo.

ii) Si $n < m$, $f : M^m \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$ con M un A-módulo.

iii) Fijado $a \in A$, $f : A[X] \longrightarrow A$, $f(g) = g(a)$ con A un anillo.

iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2.x$.

v) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f(x) = \overline{x}$.

Ejercicio 8. Sean M, N y P A-módulos y sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow P$ dos aplicaciones. Probar que:

i) Si f y g son morfismos de A-módulos entonces $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos.

ii) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y g es un monomorfismo entonces f es un morfismo de A-módulos.

iii) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y f es un epimorfismo entonces g es un morfismo de A-módulos.

Ejercicio 9. Si M y N son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))/x \in M\}$$

se llama el gráfico de f. Probar que si M y N son A-módulos entonces f es un morfismo de A-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

Ejercicio 10. Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una aplicación. Probar que f es una transformación lineal de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales si y sólo si $f : V \to W$ es un morfismo de grupos.

Ejercicio 11. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Caracterizar el módulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:

i) $N = M^n$, $S = \{x \in N/x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

ii) $N = M^n$ $(n > 2)$, $S = \{x \in N/x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.

iii) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X]/f(1) = 0\}$.

Ejercicio 12. Sea A un anillo y sean M y N dos A-módulos. Probar que:

i) $Hom_A(M, N)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es un grupo abeliano.

ii) Si A es conmutativo, la acción $(a.f)(x) = a.f(x)$ define sobre el grupo abeliano $Hom_A(M, N)$ una estructura de A-módulo. Para A no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $Hom_A(M, N)$ una estructura de $\mathcal{C}(A)$-módulo.

Ejercicio 13. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A-módulo M se llama *dual* de M al A-módulo $M^* = Hom_A(M, A)$.

i) Probar que la aplicación $\Gamma : M \longrightarrow M^{**}$ definida por

$$\Gamma(x)(f) = f(x) \qquad (x \in M\ ,\ f \in M^*)$$

es un morfismo de A-módulos y que $Ker(\Gamma) = \bigcap_{f \in M^*} Ker(f)$.

ii) Hallar un ejemplo de módulo M no nulo tal que $M^{**} = \{0\}$.

ii) Hallar un ejemplo de módulo M con $M^{**} \neq \{0\}$ y Γ no inyectiva.

Ejercicio 14. Sea M un A-módulo. Probar que $Hom_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{C}(A)$-módulos.

Ejercicio 15. Sea A un dominio íntegro y sea K su cuerpo de cocientes. Probar que $End_A(K) \simeq K$ como A-módulos.

Ejercicio 16. Sea A un anillo conmutativo y sean I y J ideales. Probar que

$$Hom_A(A/I, A/J) \simeq (J : I)/J.$$

Aplicar a $A = \mathbb{Z}$ y comparar con el ejercicio 32, ítem iii) de la práctica 1.

Ejercicio 17. Un A-módulo M se dice *simple* si $M \neq \{0\}$ y sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M.

i) Probar que un A-módulo M es simple si y sólo si $M \neq \{0\}$ y $A.x = M \; \forall \, x \in M - \{0\}$.

ii) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Probar que:

  a) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.

  b) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.

  c) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.

iii) Sea M un A-módulo. Probar que $End_A(M)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y la composición de funciones es un anillo y que, cuando M es simple, $End_A(M)$ es un anillo de división.

iv) Sea K un cuerpo y sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Probar que V es un $End_K(V)$-módulo simple.

Ejercicio 18. Dado $n \in \mathbb{N}$, determinar todos los sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$ como grupo abeliano.

Ejercicio 19. Sea M un A-módulo y sean S y T submódulos de M. Probar que $M = S \oplus T$ si y sólo si existe $e : M \longrightarrow M$ proyector ($e^2 = e$) tal que $S = Ker(e)$ y $T = Im(e)$.

Ejercicio 20. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Probar que:

i) f es sección si y sólo si f es monomorfismo e $Im(f)$ es un sumando directo de N.

ii) f es retracción si y sólo si f es epimorfismo y $Ker(f)$ es un sumando directo de M.

Ejercicio 21. Probar que no existe un epimorfismo de grupos

i) de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$.

ii) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

iii) de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 22. Sea p un primo. Probar que no existe una sección

i) de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$.

ii) de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$.

Ejercicio 23. Probar que $\mathbb{Z}^2 \simeq < (m, n) > \oplus < (r, s) >$ si y sólo si $|ms - nr| = 1$. Deducir que $< (m, n) >$ es sumando directo de $\mathbb{Z}^2$ si y sólo si $(n : m) = 1$.